Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2009-2010

Feuille d'exercices VI

Exercice 1 1) Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2) Montrer que le nombre

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$$

est rationnel.

3) En déduire qu'il existe deux nombres réels irrationnels positifs α et β tels que α^β soit rationnel.

Exercice 2 Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$ soit

$$f_{n,d}(z) = z^{n-1}(z-1)^n \cdots (z-d)^n.$$

Soit $c_{n,d}(k)$ le coefficient de z^k dans la décomposition de $f_{n,d}$ comme une combinaison linéaire de monômes.

1) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{l=1}^{n-1} f_{n,d}^{(l)}(z) = \sum_{k=n-1}^{(d+1)n-1} k! c_{n,d}(k) \sum_{m=k-n+1}^{k-1} \frac{z^m}{m!}.$$

2) Montrer que, pour tout $w \in \{1, \ldots, d\}$, on a

$$\sum_{l=1}^{n-1} f_{n,d}^{(l)}(w) = 0.$$

3) Pour tout nombre complexe z, soit

$$F_{n,d}(z) = \sum_{k=n-1}^{(d+1)n-1} k! c_{n,d}(k) \sum_{m=0}^{k-n} \frac{z^m}{m!},$$

$$R_{n,d}(z) = \sum_{k=n-1}^{(d+1)n-1} k! c_{n,d}(k) \sum_{m \geqslant k} \frac{z^m}{m!}.$$

Montrer que, pour tout $w \in \{1, \ldots, d\}$, on a

(i)

$$\mathrm{e}^w \sum_{k=n-1}^{(d+1)n-1} k! c_{n,d}(k) = F_{n,d}(w) + R_{n,d}(w),$$

(ii)

$$|R_{n,d}(w)| \leqslant \mathrm{e}^w w^{(d+1)n-1} \sum_{k=n-1}^{(d+1)n-1} |c_{n,d}(k)|.$$

4) Montrer que $|c_{n,d}(k)| \leqslant (2d)^{nd}$.

5) Montrer que, pour tout $w \in \{1, \ldots, d\}$, on a

$$|R_{n,d}(w)| \leqslant \mathrm{e}^d 2^{nd} d^{2nd+n-1}(nd+1).$$

6) Montrer que, si $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ est une famille d'entiers tel que $a_0 \neq 0$, alors pour tout nombre premier p assez grand,

$$a_0 \sum_{k=p-1}^{(d+1)p-1} \frac{k! c_{p,d}(k)}{(p-1)!} + \sum_{w=0}^{d} \frac{a_w}{(p-1)!} F_{p,d}(w)$$

est un entier non-nul.

7) En déduire que e est un nombre transcendent.

8) Montrer que π est un nombre irrationnel.

Exercice 3 Soit Λ un réseau dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. un sous-groupe de rang n de $\mathbb{R}^n$). Soit F un domaine fondamental de Λ, c'est-à-dire le parallélogramme défini par une base de Λ. On désigne par vol la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer que, si U est un sous-ensemble convexe et symétrique (par rapport à l'origine) de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{vol}(U) > 2^n \mathrm{vol}(F)$, alors $U \cap \Lambda$ contient au moins un élément non-nul.

1) Soit $V = \{\frac{1}{2}x : x \in U\}$. Exprimer $\mathrm{vol}(V)$ en fonction de $\mathrm{vol}(U)$.

2) Montrer qu'il existe $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$ tels que $(V + x) \cap (V + y) \neq \varnothing$.

3) Conclure.

Exercice 4 Soient $n > m$ deux entiers strictement positifs, et $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{Z})$ une matrice non-nulle. Soit $\|A\| := \max_{i,j} |a_{ij}|$. Pour tout élément $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, soit $\|\mathbf{t}\| := \max_i |t_i|$. Soient Z la partie entière de $(n\|A\|)^{m/(n-m)}$ et $E = \{0, 1, \ldots, Z\}^n$.

1) Déterminer le cardinale de E.

2) Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, soit u_j le nombre des éléments strictement négatifs dans la $j^{\text{ième}}$ colonne de A. Montrer que, pour tout $\mathbf{x} \in E$, la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de $A\mathbf{x}$ prend valeur dans $[-u_j\|A\|Z, (n - u_j)\|A\|Z]$.

3) En déduire que le cardinale de $A(E)$ est majoré par

$$(n\|A\|Z + 1)^m.$$

4) Montrer que $Z + 1 - (Z + 1)^{-(n-m)/m} > Z$.

5) En déduire que $|A(E)| < |E|$.

6) En déduire qu'il existe un vecteur non-nul $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\|t\| \leqslant Z$.