Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2009-2010

Feuille d'exercices VIII

Exercice 1 Soient Θ un ensemble infini dénombrable, $\mathbb{S}$ le monoïde commutatif libre engendré par Θ. On rappelle que $\mathbb{S}$ est l'ensemble des éléments de la forme $(n_x)_{x\in\Theta} \in \mathbb{N}^{\Theta}$ où n_x est nul pour tout sauf un nombre fini de $x \in \Theta$. Dans la suite, un élément $a = (n_x)_{x\in\Theta}$ dans $\mathbb{S}$ sera écrit formellement comme

$$a = \prod_{x\in\Theta} x^{n_x},$$

et la coordonnée d'indice x de a sera notée comme $v_x(a)$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ est multiplicative si f n'est pas identiquement nulle et si

$$f\Big(\prod_{x\in\Theta_0} x^{n_x}\Big) = \prod_{x\in\Theta_0} f(x^{n_x})$$

pour tout sous-ensemble fini Θ_0 de Θ. On désigne par $F(\mathbb{S})$ l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{S}$ à valeur complexe. On note $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ les fonctions constantes sur $\mathbb{S}$ qui prennent les valeurs 0 et 1 respectivement. Soit I la fonction d'indicatrice de l'ensemble $\{1\} \subset \mathbb{S}$.

1) Soit $f : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ une fonction. Montrer que, si f est une fonction multiplicative, alors on a $f(1) = 1$.
2) Pour tous les éléments a et b dans $\mathbb{S}$, on dit que a *divise* b et on note $a \mid b$ si $v_x(a) \leqslant v_x(b)$ quel que soit $x \in \Theta$. Montrer que "$|$" est une relation d'ordre sur $\mathbb{S}$.
3) Si f et g sont deux fonctions sur $\mathbb{S}$ à valeurs dans $\mathbb{S}$, on note $f * g : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ la fonction qui envoie $c \in \mathbb{S}$ en
$$\sum_{ab=c} f(a)g(b).$$
Montrer que, si f et g sont des fonctions mutiplicative, alors $f * g$ l'est aussi.
4) Montrer que $*$ est une loi de composition commutative et associative. En déduire que $(F(\mathbb{S}), +, *, \mathbf{0}, I)$ est un anneau commutatif et unifère.
5) Montrer qu'une fonction $f \in F(\mathbb{S})$ est inversible si et seulement si $f(1) \neq 0$.
6) Montrer que l'ensemble $M(\mathbb{S})$ des fonctions multiplicatives est un sous-groupe du groupe multiplicatif $F(\mathbb{S})^{\times}$.
7) Soit $\mu : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ la fonction multiplicative telle que
$$\mu(x^n) = \begin{cases} -1 & (n = 1) \\ 0 & (n > 1) \end{cases}$$
pour $x \in \Theta$. Etablir la relation $\mu * \mathbf{1} = I$.

8) Vérifier que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un monoïde commutatif libre pour la loi de multiplication. Quel sont ses générateurs ?

Exercice 2 1) Soient F et G deux fonctions complexes définies sur $[1, +\infty[$. On suppose que

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} G(x/n).$$

Montrer que

$$G(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) F(x/n),$$

où μ est la fonction de Möbius.

2) Déterminer la fonction

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Exercice 3 1) La fonction de Mangoldt $\Lambda : \mathbb{N}_* \to \mathbb{R}$ est définie comme $\Lambda := \mu * \ln$. Montrer que $\Lambda = -\mu \ln * \mathbf{1}$.

2) On désigne par $N : \mathbb{N}_* \to \mathbb{C}$ la fonction qui envoie n en lui-même. Montrer que la fonction d'Euler φ vérifie la relation $\varphi = \mu * N$. En déduire que $N = \mathbf{1} * \varphi$.

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions sur $\mathbb{N}_*$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient

$$F(x) := \sum_{n \leqslant x} f(n), \quad G(x) := \sum_{n \leqslant x} g(n).$$

1) Montrer que, pour $1 \leqslant y \leqslant x$, on a

$$\sum_{n \leqslant x} f * g(n) = \sum_{n \leqslant y} g(n) F(x/n) + \sum_{m \leqslant x/y} f(m) G(x/m) - F(x/y) G(y).$$

2) Montrer que

$$Q(x) := \sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2$$

est le nombre des entiers naturels sans facteur carré bornés par x.

3) Montrer que $\mu^2 = \lambda * \mathbf{1}$, où

$$\lambda(n) = \begin{cases} \mu(d), & \text{si } n = d^2, \\ 0, & \text{si } n \text{ n'est pas un carré.} \end{cases}$$

4) Montrer que

$$Q(x) = \sum_{d \leqslant \sqrt{x}} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d^2} \right\rfloor.$$

5) Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^2}$$

converge absoluement et déterminer sa valeur.

6) En déduire que, lorsque $x \to +\infty$, on a

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

7) Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\tau(n)$ le nombre des diviseurs de n. Montrer que

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(n) = x(\ln x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}) \qquad (x \to \infty),$$

où γ désigne la constante d'Euler.

8) Montrer que

$$\sum_{n\leqslant x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x).$$