Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2009-2010

Feuille d'exercices IX

Dans cette feuille, le symbole s désigne un nombre complexe, σ et τ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de s.

Exercice 1 On admet le théorème de Cauchy sous la forme suivante.

Soient Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si γ est un lacet ferméde classe C^1 par morceaux dont le domaine contouré est contenu dans Ω, alors

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

On rappelle que c'est une conséquence

immédiate des conditions de Cauchy-Riemann et la formule de Green. Dans la suite, on fixe un ouvert non-vide Ω de $\mathbb{C}$ et une fonction holomorphe sur Ω.

1) Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tel que le disque fermé $\overline{D(a;r)}$ soit contenu dans Ω. Montrer que, pour tout z, $|z-a| < r$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a;r)} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w,$$

où $C(a;r) := \{w \in \mathbb{C} : |w-a| = r\}$.

2) Pour tout $n \geqslant 1$, soit

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w.$$

Montrer que le rayon de convergence

de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$$

est supérieur ou égal à r, et que cette série converge vers f sur $\{z : |z-a| < r\}$.

3) En déduire que

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \sup_{\theta\in[0,2\pi[} |f(a+r\mathrm{e}^{i\theta})|.$$

4) En déduire que, si f est une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

5) En déduire que tout polynôme non-constant dans $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 La fonction Γ d'Euler est

définie comme

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (\sigma > 0).$$

1) Montrer que l'intégrale comme ci-dessus définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\sigma > 0$.

2) Montrer la relation $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ et en déduire une prolongment méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$.

3) Déterminer les pôles de la fonction Γ, et les résidus correspondants.

4) Montrer que la restriction de la fonction Γ à $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ est logarithmiquement convexe.

5) Montrer que, si $t \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}_*$, $n > 1$, alors

$$0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^t\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \leqslant \frac{\mathrm{e}t^2}{4n}.$$

6) Pour tout entier $n > 0$, soit

$$\Gamma_n(s) := \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que la suite des fonction $(\Gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers Γ sur le demi-plan $\sigma > 0$.

7) En déduire que

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

8) En déduire que

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \mathrm{e}^{\gamma s} s \prod_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right)\mathrm{e}^{-s/n},$$

où γ est la constante d'Euler.

9) En déduire que $1/\Gamma(s)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 3 Le but de cet exercice est d'étudier les produits infinis dans $\mathbb{C}$.

1) Soit $(c_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ une famille finie de nombres complexes. Montrer que

$$\prod_{n=0}^{N}(1+|c_n|)\leqslant \exp\sum_{n=0}^{N}|c_n|.$$

$$\left|\prod_{n=0}^{N}(1+c_n)-1\right|\leqslant \prod_{n=0}^{N}(1+|c_n|)-1.$$

2) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres positifs. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n\geqslant 0}(1+a_n)$$

converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

3) Montrer que, si $(c_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes telle que $\sum_{n\geqslant 0}|c_n|$ converge, alors le produit $\prod_{n\geqslant 0}(1+$

c_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$. En outre, $\ell = 0$ si et seulement s'il existe n tel que $c_n = -1$.

4) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert non-vide Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que, pour tout n, la fonction f_n n'est pas identiquement -1, et que la série $\sum_{n \geqslant 1}$ converge normalement sur tout compact de Ω. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n \geqslant 0} (1 + f_n(z))$$

converge uniformément sur tout compact de Ω et définit une fonction holomorphe $F(z)$ sur Ω. Montrer que,

pour tout $z \in \Omega$, on a

$$v_z(F) = \sum_{n \geqslant 0} v_z(1 + f_n).$$

5) Montrer que le produit infini

$$z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

définit une fonction holomorphe $g(z)$ sur $\mathbb{C}$.

6) Montrer que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi}\right).$$

7) Montrer que

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n\pi)^2}.$$

8) En déduire que $g(z) = \sin(z)$.

9) Montrer que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$