Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2010-2011

Feuille d'exercices XI

Pour tout nombre réel α, soit $\|\alpha\|$ la distance entre α et $\mathbb{Z}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on désigne par $S(N,\alpha)$ la somme

$$\sum_{n\leqslant N} \Lambda(n)\mathrm{e}(n\alpha),$$

où $\Lambda = \mu * \log$ est la fonction de Mangoldt, et $\mathrm{e}(x) = \mathrm{e}^{2\pi ix}$.

1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\alpha\| = \min(\langle\alpha\rangle, 1-\langle\alpha\rangle),$$

où $\langle\alpha\rangle$ désigne la partie fractionnaire de α.

2. Soient α un nombre réel et $N \geqslant 1$ un entier. Montrer que, si

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N} \langle n\alpha\rangle < N/(N+1),$$

alors il existe deux entiers distincts n et m dans $\{0,\dots,N\}$ tels que

$$|\langle n\alpha\rangle - \langle m\alpha\rangle| < 1/(N+1).$$

En déduire que l'on a toujours

$$\min_{1\leqslant n\leqslant N} \|n\alpha\| \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

3. Montrer que, si $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors l'ensemble des nombres rationnels a/q (où $a,q\in\mathbb{Z}$, $q>0$) tels que

$$\left|\frac{a}{q}-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

est infini.

4. Montrer qu'il existe une constante absolue C_0 telle que, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ et tous entiers $N_2 > N_1 > 0$, on ait

$$\left|\sum_{N_1<n\leqslant N_2} \mathrm{e}(n\alpha)\right| \leqslant C_0 \min\Big(N_2-N_1, \frac{1}{\|\alpha\|}\Big).$$

5. Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et N,T des entiers $\geqslant 1$. Montrer que

$$\sum_{t\leqslant T} \max_m \left|\sum_{m\leqslant r\leqslant N/t} \mathrm{e}(rt\alpha)\right| \leqslant C_0 \sum_{t\leqslant T} \min\Big(\frac{N}{t}, \frac{1}{\|t\alpha\|}\Big).$$

6. Pour des nombres $U,V\geqslant 1$ et $s\in\mathbb{R}$, on note

$$F_U(s) = \sum_{n\leqslant U}\frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad G_V(s) = \sum_{n\leqslant V}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Vérifier l'égalité

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = F(s) - \zeta(s)F(s)G(s) - \zeta'(s)G(s) - \Big(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + F(s)\Big)(1 - \zeta(s)G(s))$$

et en déduire que $\Lambda(n)$ s'écrit comme la somme des quatre termes suivants

$$a_{1,U}(n) = \mathbb{1}_{n\leqslant U}\Lambda(n), \qquad a_{2,U,V}(n) = -\sum_{\substack{md\mid n\\ m\leqslant U,\, d\leqslant V}} \Lambda(m)\mu(d),$$

$$a_{3,V} = \sum_{d\mid n,\, d\leqslant V} \mu(d)\log\frac{n}{d}, \qquad a_{4,U,V} = -\sum_{\substack{mk=n\\ m>U,\, k>1}} \Lambda(m)\sum_{d\mid k,\, d\leqslant V}\mu(d).$$

7. Soit
$$S_{1,U}(N,\alpha) := \sum_{n\leqslant N} a_{1,U}(n)\mathrm{e}(n\alpha).$$
Montrer qu'il existe une constante absolue C_1 telle que, pour tout entier $U \in \{1,\dots,N\}$, on a
$$|S_{1,U}(N,\alpha)| \leqslant C_1 U.$$

8. Soit
$$S_{2,U,V}(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N} a_{2,U,V}(n)\mathrm{e}(n\alpha).$$
Montrer que
$$S_{2,U,V}(N,\alpha) = -\sum_{t\leqslant UV}\sum_{\substack{md=t\\ m\leqslant U,\, d\leqslant V}} \mu(d)\Lambda(m)\sum_{r\leqslant N/t}\mathrm{e}(rt\alpha).$$
En déduire que
$$|S_{2,U,V}(N,\alpha)| \leqslant C_0\log(UV)\sum_{t\leqslant UV}\min\Big(\frac{N}{t}, \frac{1}{\|t\alpha\|}\Big).$$

9. Soit
$$S_{3,V}(N,\alpha) = \sum_{n\leqslant N} a_{3,V}(n)\mathrm{e}(n\alpha).$$
Montrer que
$$S_{3,V}(N,\alpha) = \int_1^N \sum_{d\leqslant V}\mu(d)\sum_{x\leqslant m\leqslant N/d}\mathrm{e}(dm\alpha)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$
En déduire que
$$|S_{3,V}(N,\alpha)| \leqslant C_0\log(N)\sum_{t\leqslant V}\min\Big(\frac{N}{t}, \frac{1}{\|t\alpha\|}\Big).$$

10. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soient a et q deux entiers tels que $q\geqslant 1$ et $\mathrm{pgcd}(a,q)=1$. On suppose que
$$\Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

1) Montrer que, pour tout entier $T \geqslant 1$

$$\sum_{t \leqslant T} \min\Big(\frac{N}{t}, \frac{1}{\|t\alpha\|}\Big) \leqslant \sum_{0 \leqslant h \leqslant T/q} \sum_{r=1}^{q} \min\Big(\frac{N}{hq+r}, \frac{1}{\|ra/q + hq\beta + r\beta\|}\Big),$$

où $\beta = \alpha - a/q$.

2) Montrer que

$$\sum_{r \leqslant q/2} \min\Big(\frac{N}{r}, \frac{1}{\|ra/q + r\beta\|}\Big) \leqslant \sum_{r \leqslant q/2} \frac{1}{\|ra/q\| - 1/2q} = O(q \log q).$$

3) Soit I un intervalle dans $[0,1]$ qui est de longueur $1/q$. Montrer qu'il existe au plus quatre éléments $r \in \{1, \dots, q\}$ tels que

$$\frac{ra}{q} + hq\beta + r\beta \in I + \mathbb{Z}.$$

4) Supposons que h et r sont des entiers tels que $h \geqslant 1$ ou $r > q/2$. Montrer que $hq + r \geqslant (h+1)q/2$.

5) En déduire que

$$\sum_{t \leqslant T} \min\Big(\frac{N}{t}, \frac{1}{\|t\alpha\|}\Big) = O\Big(\Big(\frac{N}{q} + T + q\Big) \log(2qT)\Big).$$

11. Soit

$$S_{4,U,V}(N, \alpha) = \sum_{n \leqslant N} a_{4,U,V}(n) \mathrm{e}(n\alpha).$$

On admet que

$$|S_{4,U,V}(N,\alpha)| = O\Bigg(N^{1/2} (\log N)^3 \max_{U \leqslant M \leqslant N/V} \Bigg(M + \sum_{1 \leqslant m \leqslant N/M}\Bigg) \min\Big(\frac{N}{m}, \frac{1}{\|m\alpha\|}\Big)\Bigg).$$

Montrer que, si $q \geqslant 1$ est un entier tel que $\|q\alpha\| \leqslant 1/q$, alors

$$|S(N,\alpha)| = O(Nq^{-1/2} + N^{4/3} + (Nq)^{1/2} (\log N)^4).$$