Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2010-2011

Feuille d'exercices III

Exercice 1 Soit K un corps commutatif. On appelle *valeur absolue* sur K toute application $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall\, x, y \in K$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;
(ii) $\forall\, x, y \in K$, $|xy| = |x| \cdot |y|$;
(iii) $\forall\, x \in K$, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Dans cet exercice, on fixe une valeur absolue $|\cdot|$ sur K.

1) Montrer que la fonction $d : K \times K \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) := |x - y|$ définit une métrique sur K.
2) On appelle *suite de Cauchy* toute suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dans K telle que
$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{n,m\geqslant N} |a_n - a_m| = 0.$$
Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(K)$ des suites de Cauchy dans K, muni des lois de composition que l'on précisera, forme une K-algèbre commutative.
3) Montrer que le sous-ensemble $I(K)$ (de $C(K)$) des suites convergeant vers 0 est un idéal maximal de $C(K)$.
4) On désigne par $\widehat{K}$ le corps quotient $C(K)/I(K)$. Montrer que $\widehat{K}$ est une extension de K.
5) Montrer que l'application $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ s'étend par continuité en une valeur absolue sur $\widehat{K}$.

Exercice 2 Soit K un corps commutatif muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. On dit que la valeur absolue $|\cdot|$ est *non-archimédienne* si la condition suivante est satisfaite :
$$\forall\, x, y \in K, \quad |x + y| \leqslant \max(|x|, |y|).$$

1) Montrer que, si la valeur absolue $|\cdot|$ est non-archimédienne, alors la boule unité fermée $\mathcal{O} := \{x \in K \,:\, |x| \leqslant 1\}$ est un anneau local dont l'idéal maximal est la boule ouverte $\mathfrak{m} := \{x \in K \,:\, |x| < 1\}$.
2) On suppose que la caractéristique de K est $p > 0$. Montrer que la valeur absolue $|\cdot|$ est nécessairement non-archimédienne (indication : appliquer l'endomorphisme de Frobenius).

Exercice 3 Soient K un corps commutatif et $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ une valuation discrète. On fixe dans cet exercice un nombre $q > 1$.

1) Pour tout $x \in K$, soit $|x| := q^{-v(x)}$. Montrer que $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ est une valeur absolue non-archimédienne sur K.

Dans la suite, $\mathcal{O}$ désigne la boule unité fermée de K et $\mathfrak{m}$ désigne son idéal maximal. Soit $\widehat{K}$ le complété de K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|$, où cette dernière s'étend par continuité. Soient $\widehat{\mathcal{O}}$ la boule unité fermée de $\widehat{K}$ et $\widehat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de $\widehat{\mathcal{O}}$.

2) Montrer que $\widehat{\mathcal{O}}$ est la fermeture de $\mathcal{O}$ dans $\widehat{K}$.

3) Soit $n \geqslant 0$ un entier. Montrer que le noyau de l'homomorphisme composé

$$\mathcal{O} \to \widehat{\mathcal{O}} \to \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$$

est $\mathfrak{m}^n$.

4) Montrer que $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^n \cong \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$ $(n \geqslant 0)$.

5) Soit A un anneau commutatif et unifère. On suppose donné, pour tout entier $n \geqslant 0$, un homomorphisme d'anneaux $f_n : A \to \mathcal{O}/\mathfrak{m}^n$, de sorte que le diagramme suivant commute pour tous entiers i et j avec $i \geqslant j \geqslant 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \mathcal{O}/\mathfrak{m}^i \arrow[r, "\pi_{i,j}"'] & \mathcal{O}/\mathfrak{m}^j \end{tikzcd}$$

où $\pi_{i,j}$ est l'homomorphisme de projection. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\widehat{f} : A \to \widehat{\mathcal{O}}$ tel que le diagramme suivant commute pour tout entier $i \geqslant 0$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "f_i"'] & \widehat{\mathcal{O}} \arrow[d, "\pi_i"] \\ \mathcal{O}/\mathfrak{m}^i \arrow[r, "\cong"'] & \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathfrak{m}}^i \end{tikzcd}$$

où π_i est l'homomorphisme de projection.

Exercice 4 Soit k un corps. Soit K le corps des fractions de l'anneau $k[T]$ des polynômes à coefficients dans k. Si $f = P/Q$ est un éléments de K, où P et Q sont des polynômes, $Q \neq 0$, on note

$$v(f) = \deg(Q) - \deg(P).$$

1) Montrer que l'application $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ est bien définie et est une valuation sur K.

2) Soit $|\cdot| : K \to \mathbb{R}_+$ la valeur absolue telle que $|f| = q^{-v(f)}$, où $q > 0$ est un nombre réel. Déterminer la boule unité fermée $\mathcal{O}$ de K.

3) Montrer que l'automorphisme $\tau : f(T) \mapsto f(T^{-1})$ définit un isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{O}$ et la localisation de $k[T]$ par rapport à l'idéal maximal (T).

4) Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Montrer que l'isomorphisme d'anneaux dans la question précédente induit pour chaque entier $i \geqslant 0$ un isomorphisme d'anneaux de $\mathcal{O}/\mathfrak{m}^i$ vers $k[T]/(T^i)$.

5) Soit $\widehat{K}$ le complété de K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|$. Montrer que la boule unité fermée $\widehat{\mathcal{O}}$ de $\widehat{K}$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles à coefficients dans k.