Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2010-2011

Feuille d'exercices IV

Exercice 1 Soit K un corps commutatif muni d'une valeur absolue non-archimédienne $|\cdot|$.

1) Montrer que, si x et y sont deux éléments de K tels que $|x| \neq |y|$, alors on a $|x+y| = \max(|x|,|y|)$.
2) Montrer que, si $(x_1,\ldots,x_n)$ est une famille d'éléments de K telle que $x_1+\cdots+x_n = 0$, alors il existe deux indices distincts $j,k \in \{1,\ldots,n\}$ tels que
$$|x_j| = |x_k| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Exercice 2 Soit k un corps commutatif. On désigne par $k[T]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans k et K son corps des fractions.

1) Soit $P \in k[T]$ un polynôme unitaire de degré $\geqslant 1$ qui est irréductible. Pour tout $F \in k[T]$ soit
$$v_P(F) := \sup\{n \in \mathbb{N} \,:\, P^n \mid F\}.$$
Montrer que $v_P : k[T] \to \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ s'étend en une valuation discrète sur K.
2) Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur K. Montrer que, si la restriction de $|\cdot|$ à k est triviale (autrement dit $|0| = 0$ et $|a| = 1$ pour tout $a \in k$), alors $|\cdot|$ est nécessairement une valeur absolue non-archimédienne.
3) Construire un exemple d'une valeur absolue archimédienne sur K dans le cas où $k = \mathbb{Q}$.
4) Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur K dont la restriction à k est triviale. On suppose en outre que $|T| \leqslant 1$ et que $|\cdot|$ n'est pas triviale sur K (autrement dit, il existe un élément non-nul de K dont la valeur absolue n'est pas 1).
   (i) Montrer que $|F| \leqslant 1$ pour tout $F \in k[T]$.
   (ii) Montrer que $\{F \in k[T] \,:\, |F| < 1\}$ est un idéal premier de $k[T]$. En déduire qu'il est engendré par un polynôme unitaire irréductible.
   (iii) Montrer que, pour tout polynôme $F \in k[T]$ qui n'est pas divisible par P, on a $|F| = 1$. En déduire qu'il existe $R > 1$ tel que $|f| = R^{-v_P(f)}$ quel que soit $f \in K^\times$.
5) Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur K dont la restriction à k est triviale. On suppose en outre que $C := |T| > 1$. Montrer que, si F est un polynôme de degré $d \geqslant 0$ dans $k[T]$, alors $|F| = C^d$.

Dans la suite, on désigne par $\mathbb{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles dans $k[T]$. On fixe un nombre réel $q > 1$. Pour tout $P \in \mathbb{P}$, soit $|\cdot|_P$ la valeur abslue sur K définie comme
$$\forall\, f \in K^\times, \quad |f|_P = q^{-v_P(f)}.$$
Soit en outre $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue sur K telle que
$$\forall\, f \in K^\times, \quad |f|_\infty = q^{-v_\infty(f)},$$
où v_∞ est la valuation discrète qui prolonge la fonction $-\deg$ sur $k[T]$.

6) Montrer la formule du produit

$$\forall\, f \in K^{\times}, \quad \Big(\prod_{P \in \mathbb{P}} |f|_P^{\deg(P)} \Big) \cdot |f|_{\infty} = 1.$$

On suppose désormais que k est un corps fini de cardinale q. Pour tout polynôme non-nul $F \in k[T]$, soit $\varphi(F)$ le nombre des polynômes de degré $\leqslant \deg(F)$ qui sont premiers à F.

7) Montrer que, pour tout polynôme non-nul $F \in k[T]$, $\varphi(F)$ s'identifie au nombre des éléments irréductibles dans l'anneau quotient $k[T]/(F)$.

8) Montrer que, si $\mathbb{P}$ est un polynôme unitaire irréductible, alors

$$\varphi(P^a) = |P|_{\infty}^{a} - |P|_{\infty}^{a-1}$$

pour tout $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

9) En déduire que

$$\varphi(F) = |F|_{\infty} \prod_{P|F} \Big(1 - \frac{1}{|P|_{\infty}}\Big).$$

10) Pour tout entier $d \geqslant 0$, soit M_d l'ensemble des polynômes unitaires de degré $\leqslant d$. Montrer que

$$\sum_{F \in M_d} \frac{1}{|F|_{\infty}^{s}} = \frac{1 - q^{(1-s)(d+1)}}{1 - q^{1-s}}.$$

11) En déduire que la série

$$\zeta_K(s) = \sum_{F \text{ unitaire}} \frac{1}{|F|_{\infty}^{s}} \qquad (s \in \mathbb{C})$$

converge simplement sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$ vers la fonction $(1 - q^{1-s})^{-1}$.

12) Pour tout entier $d \geqslant 1$, soit $\Theta(d)$ le nombre des polynômes irréductibles de degré d. Montrer que la fonction ζ_K s'écrit comme un produit infini sur $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\zeta_K(s) = \prod_{d \geqslant 1} \big(1 - q^{-ds}\big)^{-\Theta(d)}.$$

13) Quitte à calculer la dérivée logarithmique de ζ_K par rapport à $u = q^{-s}$, montrer que

$$\sum_{d|n} d\Theta(d) = q^n$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.