Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2010-2011

Feuille d'exercices V

Soit $q \geqslant 1$ un entier. On appelle *caractère de Dirichlet* modulo q toute fonction $\chi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) la restriction de χ à chaque classe de congruence est constante,

(ii) la fonction de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{C}$ induite par χ est nulle en dehors de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$, et définit un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ vers $\mathbb{C}^\times$.

Le *caractère principal* modulo q est défini comme

$$\chi_0(n) := \begin{cases} 1, & \text{si } (n, q) = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit qu'un caractère χ modulo q est *primitif* s'il n'existe pas $q_0 \mid q$, $q_0 < q$ tel que

$$(m, q_0) = (n, q_0) = 1 \text{ et } m \equiv n \pmod{q_0} \implies \chi(m) = \chi(n). \tag{1}$$

On rappelle que la *somme de Gauss* d'un caractère de Dirichlet χ est la fonction $G_\chi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ définie comme

$$G_\chi(n) := \sum_{1 \leqslant m \leqslant q} \chi(m) \mathrm{e}(mn/q),$$

où $\mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2\pi i t}$.

Exercice 1 Dans cet exercice, $q \geqslant 1$ désigne un entier. Soit χ un caractètre de Dirichlet modulo q qui n'est pas primitif. Soit q_1 le plus petit diviseur de q qui vérifie la relation (1).

1) Montrer que, si $n \geqslant 1$ est un entier qui est premier à q_1, alors il existe un entier $t \geqslant 0$ tel que $n + tq_1$ soit premier à q.
2) Soit n un entier tel que $(n, q_1) = 1$. Montrer que, si t_1 et t_2 sont deux entiers $\geqslant 0$ tels que $(n + t_1 q_1, q) = (n + t_2 q_1, q) = 1$, alors $\chi(n + t_1 q_1) = \chi(n + t_2 q_1)$.
3) Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $(n, q_1) = 1$, on pose $\chi_1(n) = \chi(n + tq_1)$, où $t \geqslant 0$ est un entier tel que $(n + tq_1, q) = 1$. Montrer que χ_1 se prolonge en un caractère de Dirichlet modulo q_1.
4) Montrer que χ_1 est primitif, et est le seul caractère de Dirichlet primitif tel que $\chi(n) = \chi_1(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ qui est premier à q (on dit que χ_1 est le caractère primitif qui induit χ).

Exercice 2 Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ vers $\mathbb{C}$. On munit $\mathbb{A}$ des lois de composition suivantes :

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n), \qquad (f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d) g(n/d).$$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est multiplicative si $f(1) = 1$ et si $f(ab) = f(a)f(b)$ pour tous entiers a, b tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. On désigne par $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives sur $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(\mathbb{A}, +, *)$ est un anneau commutatif et unifère. Déterminer l'élément unité δ et l'élément neutre $\mathbf{0}$ de $\mathbb{A}$.
2) Montrer qu'une fonction $f \in \mathbb{A}$ est inversible pour la loi $*$ si et seulement si $f(1) \neq 0$. En déduire que $\mathbb{M} \subset \mathbb{A}^\times$.
3) Montrer que si f est une fonction multiplicative, alors il en est de même de f^{-1}. En déduire que $\mathbb{M}$ est un sous-groupe de $\mathbb{A}^\times$.
4) Soit μ la fonction sur $\mathbb{N}^*$ qui envoie n en 0 si n a un facteur carré $\neq 1$, et en $(-1)^d$ si n n'a pas de facteur carré $\neq 1$ et a exactement d facteurs premiers. Montrer que μ est une fonction multiplicative.
5) Soit $\mathbb{1}$ la fonction constante sur $\mathbb{N}^*$ qui prend valeur 1. Montrer que $\mathbb{1}$ est une fonction multiplicative et en déduire que $\mu * \mathbb{1} = \delta$.

Exercice 3 Soit $q \geqslant 1$ un entier et χ un caractère modulo q qui n'est pas primitif. On suppose que χ_1 est un caractère modulo q_1 qui induit χ, où $q_1 \mid q$, $q_1 < q$. Soit en outre $r = q/q_1$.

1) Établir l'égalité

$$G_\chi(1) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant q} \sum_{d \mid (m,q)} \chi_1(m) \mathrm{e}(m/q) \mu(d) = \sum_{d \mid r} \chi_1(d) \mu(d) \sum_{1 \leqslant m_1 \leqslant q/d} \chi_1(m_1) \mathrm{e}(m_1 d/q).$$

2) Soit d un entier tel que $1 \leqslant d < r$ et $d \mid r$. Montrer que

$$\sum_{1 \leqslant m_1 \leqslant q/d} \chi_1(m_1) \mathrm{e}(m_1 d/q) = 0.$$

3) Montrer que, si $(r, q_1) > 1$, alors $G_\chi(1) = 0$.
4) Montrer que, si $(r, q_1) = 1$, alors

$$G_\chi(1) = \mu(r) \chi_1(r) G_{\chi_1}(1).$$

Exercice 4 Pour tout caractère de Dirichlet χ, on désigne par S_χ la fonction sur $[1, +\infty[$ telle que

$$S_\chi(x) := \sum_{n \leqslant x} \chi(n).$$

1) Montrer que, si χ n'est pas principal, alors S_χ est une fonction périodique.
2) Soient $q \geqslant 1$ un entier et χ un caractère de Dirichlet modulo q. Montrer que, si χ n'est pas principal, alors $|S_\chi(x)| \leqslant \frac{1}{2} q$ pour tout $x \geqslant 1$.
3) Soient $q \geqslant 1$ un entier et χ un caractère de Dirichlet modulo q qui est primitif.
   (i) Montrer que

$$G_\chi(1) = -\frac{2\pi i}{q} \int_0^q S_\chi(t) \mathrm{e}(t/q) \,\mathrm{d}t = -\frac{2\pi i}{q} \int_0^q S_\chi(q-t) \mathrm{e}(-t/q) \,\mathrm{d}t.$$

   (ii) Montrer que $S_\chi(q-t) = -\chi(-1) S_\chi(t)$ presque partout.
   (iii) En déduire que

$$G_\chi(1) = -\frac{\pi i}{q} \int_0^q S_\chi(t) (\mathrm{e}(t/q) - \chi(-1) \mathrm{e}(-t/q)) \,\mathrm{d}t.$$

   (iv) Montrer que $\sup_{x \geqslant 1} |S_\chi(x)| \geqslant \frac{1}{4} \sqrt{q}$.