Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2010-2011

Feuille d'exercices VI

Exercice 1 Soit μ la mesure sur $\mathbb{R}_+$ l'image directe de la mesure de Lebesgue par l'application de norme $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ qui envoie $(x_1, \dots, x_n)$ en $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

1) Soit V_n le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que l'égalité suivante entre les mesures sur $\mathbb{R}_+$:
$$\mu(\mathrm{d}t) = nV_n t^{n-1}\mathrm{d}t.$$

2) Montrer que
$$V_n = \pi^{n/2}\Gamma\Big(1 + \frac{n}{2}\Big)^{-1}.$$

3) Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-(n+1)/2}\,\mathrm{d}x = \pi^{(n+1)/2}\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{-1}.$$

Exercice 2 Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ vers $\mathbb{C}$. A chaque fonction $f \in \mathbb{A}$ on associe une série de fonction
$$L(f, s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{f(n)}{n^s},$$
appelée la *série de Dirichlet* de f. On désigne par $C(f)$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ des points s où la série $L(f, s)$ est convergente. Soit $C_a(f)$ le sous-ensemble de $C(f)$ des point s où la série $L(f, s)$ est absoluement convergente.

1) Soient f et g deux fonctions dans $\mathbb{A}$, et $h = f * g$.
   (a) Montrer que, si s est un point de $C_a(f) \cap C_a(g)$, alors la série de Dirichlet de h converge absoluement en s.
   (b) Soit s un point dans $C(f) \cap C_a(g)$. Pour tout $x \geqslant 1$, soit
   $$A(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{f(n)}{n^s}.$$
   Montrer que
   $$\sum_{n \leqslant x} \frac{h(n)}{n^s} = \sum_{d \leqslant x} \frac{g(d)}{d^s} A\Big(\frac{x}{d}\Big).$$
   (c) En déduire que, si $s \in C(f) \cap C_a(g)$, alors $s \in C(h)$, et
   $$L(h, s) = L(f, s)L(g, s).$$

2) Soit $f \in \mathbb{A}$ la fonction telle que
$$f(n) = \frac{(-1)^n}{(\log(2n))^2} \qquad (n \geqslant 1).$$
Soit $h = f * f$.

(a) Montrer que la série de Dirichlet de f converge en tout point de l'axe $\mathrm{Re}(s) = 0$.

(b) Montrer que la fonction h n'est pas bornée. En déduire que la série de Dirichlet de h diverge en tout point de l'axe $\mathrm{Re}(s) = 0$.

3) Soient $f \in \mathbb{A}$ une fonction multiplicative et s un nombre complexe. On suppose que

$$\sum_p \sum_{\alpha \geqslant 1} \left| \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right| < +\infty,$$

où p parcourt tous les nombres premiers.

(a) Montrer que le produit infini

$$\prod_p \left(1 + \sum_{\alpha \geqslant 1} \left| \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right| \right)$$

converge vers un nombre positif M et que

$$\sum_{n \leqslant x} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \leqslant M$$

pour tout $x \geqslant 1$.

(b) En déduire que la série de Dirichlet de f converge absolument en s, et

$$L(f, s) = \prod_p \sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}.$$

4) Soit $\Lambda \in \mathbb{A}$ la fonction de Mangoldt définie comme $\Lambda = \mu * \log$.

(a) Montrer que $\Lambda = -\mu \log * \mathbb{1}$.

(b) Montrer que, si a et b sont deux entiers $\geqslant 1$ tels que $(a, b) = 1$, alors $\Lambda(ab) = \delta(a)\Lambda(b) + \delta(b)\Lambda(a)$.

(c) En déduire que $\Lambda(n) = 0$ si n n'est pas une puissance de nombre premier.

(d) Montrer que, si p est un nombre premier et si $\alpha \geqslant 1$ est un entier, alors $\Lambda(p^\alpha) = \log(p)$.

(e) Montrer que la série de Dirichlet associée à Λ converge sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(f) Établir l'égalité

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = L(\Lambda, s)$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.