Université Paris Diderot
M1 Arithmétique
2010-2011

Feuille d'exercices VII

Exercice 1 Pour tout nombre réel $x > 0$, on désigne par $M(x)$ la somme

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n),$$

où μ est la fonction de Möbius.

1) Montrer que la série de Dirichlet de μ converge absolument dans le demi-plan ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, et la convergence est uniforme sur tout sous-ensemble compact de ce demi-plan.
2) Montrer l'égalité $\zeta(s)L(\mu, s) = 1$ sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.
3) En déduire que la fonction $L(\mu, s)$ admet un prolongement analytique en une fonction méromorphe $F(s)$ sur $\mathbb{C}$.
4) Montrer que $F(s)$ est holomorphe dans un ouvert contenant le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ et que $F(1) = 0$.
5) Montrer l'égalité suivante pour $x > 1$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^s} = s \int_1^x M(t) t^{-1-s} \, \mathrm{d}t + M(x) x^{-s} \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

6) En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\zeta(s)^{-1} = s \int_1^\infty \frac{M(t)}{t^{1+s}} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout nombre réel $T > 1$, on définit la fonction F_T sur $\mathbb{C}$ comme la suite :

$$F_T(s) := \int_1^T \frac{M(t)}{t^{1+s}} \, \mathrm{d}t.$$

Considérons pour $R > 0$ fixé et $\delta > 0$ petit le contour γ délimitant la région

$$S := \{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \geqslant 1 - \delta, \ |s - 1| \leqslant R \}$$

qui est contenue dans le domaine de holomorphie de la fonction F. Soit

$$G_{T,R}(s) := (s^{-1} F(s) - F_T(s)) T^{s-1} \Big(1 + \frac{(s-1)^2}{R^2} \Big).$$

7) Montrer que F_T est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
8) Établir l'égalité

$$F(1) - F_T(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma G_{T,R}(s) \, \frac{\mathrm{d}s}{s-1}.$$

9) Soit γ_1 la partie de γ située dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$. Montrer que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} G_{T,R}(s)\,\frac{\mathrm{d}s}{s-1}\right| \leqslant \frac{1}{R}.$$

10) Soit γ_2 la partie de γ située dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) < 1$.

(i) En utilisant le fait que F_T est une fonction entière, montrer que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} F_T(s)T^{s-1}\Big(1+\frac{(s-1)^2}{R^2}\Big)\frac{\mathrm{d}s}{s-1}\right| \leqslant \frac{1}{R}.$$

(ii) Montrer que, pour tout s dans le domaine d'holomorphie de F tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, la fonction

$$s^{-1}F(s)T^{s-1}\Big(1+\frac{(s-1)^2}{R^2}\Big)\frac{1}{s-1}.$$

converge vers 0 lorsque $T \to +\infty$. De plus, cette convergence est uniforme sur tout compact contenu dans l'intersection du domaine d'holomorphie de F avec la bande $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

(iii) En déduire que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} F(s)T^{s-1}\Big(1+\frac{(s-1)^2}{R^2}\Big)\frac{\mathrm{d}s}{s-1} = 0.$$

11) En déduire que

$$\lim_{T\to+\infty} F_T(0) = F(0).$$

12) Montrer que l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{M(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est convergente et nulle.

13) En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n} - \frac{M(x)}{x}\right) = 0.$$

14) Pour tout $x \geqslant 1$, soit $H(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\log(n)$. Montrer que

$$H(x) = M(x)\log x - \int_1^x \frac{M(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

15) Montrer que

$$H(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\psi(x/n),$$

où $\psi(x) = \sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)$.

16) En utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme $\psi(x) \sim x$, montre que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M(x)}{x} = 0.$$

17) Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n} = 0.$$