Université Paris Diderot
M1 Arithmétique (2010-2011)

Contrôle de connaissance
du mercredi 23 mars 2011 (Durée 2 h)
Documents autorisés

Première partie

Soient p un nombre premier impair et $\mathbb{F}_p$ le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On appelle caractère de $\mathbb{F}_p^\times$ tout homomorphisme de groupes de $\mathbb{F}_p^\times$ vers $\mathbb{C}^\times$. On désigne par G l'ensemble des caractères de $\mathbb{F}_p^\times$. Le caractère principal (i.e. le morphisme de groupe qui est constant de valeur 1) est noté ε. Pour tout $\chi \in G$, on étend le domaine de définition de χ à $\mathbb{F}_p$ en prenant

$$\chi(0) := \begin{cases} 0, & \chi \neq \varepsilon, \\ 1, & \chi = \varepsilon. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble G, muni de la loi de composition que l'on précisera, est un groupe cyclique. Déterminer son cardinal.

2. Montrer que le groupe G admet un et un seul élément λ qui est d'ordre 2.

Dans les questions **3**–**6**, on fixe un élément $a \in \mathbb{F}_p$ et un entier $n \geqslant 1$ qui divise $p-1$. On désigne par $N(x^n = a)$ le nombre des solutions dans $\mathbb{F}_p$ de l'équation $x^n = a$.

3. On suppose que l'équation $x^n = a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{F}_p$. Montrer qu'il existe un caractère $\chi \in G$ qui est d'ordre n dans le groupe G et tel que $\chi(a) \neq 1$.

4. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $N(x^n = a)$ est ou bien nul ou bien égal à n.

5. Montrer que

$$N(x^n = a) = \sum_{\chi \in G,\, \chi^n = \varepsilon} \chi(a).$$

6. On suppose $n = 2$. Montrer que

$$N(x^2 = a) = 1 + \lambda(a),$$

où λ est le caractère que l'on a introduit dans la question **2**.

7. Montrer que

$$N(x^2 + y^2 = 1) = p + \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{F}_p^2,\\ a+b=1}} \lambda(a)\lambda(b),$$

où $N(x^2+y^2 = 1)$ désigne le nombre des solutions dans $\mathbb{F}_p^2$ de l'équation $x^2+y^2 = 1$.

Deuxième partie

Le but de cette partie est de définir l'analogue p-adique de la fonction Γ. On fixe un nombre premier impair p. Pour tout entier $k \geqslant 1$, soit

$$\Gamma_p(k) := (-1)^k \prod_{\substack{1\leqslant j<k \\ p\nmid j}} j. \tag{1}$$

On convient que $\Gamma_p(1) = -1$. **TSVP**

8. Montrer que, pour tout entier $N \geqslant 1$, l'application $x \mapsto x^{-1}$ définit une bijection de $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ vers lui-même, et que

$$\{x \in (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times \mid x = x^{-1}\} = \{1, -1\}.$$

9. Montrer que, pour tout entier $N \geqslant 1$, on a

$$\prod_{\substack{1 \leqslant j < p^N \\ p \nmid j}} j \equiv -1 \pmod{p^N}.$$

10. En déduire

$$\Gamma_p(k + p^N)/\Gamma_p(k) \equiv 1 \pmod{p^N}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}_*$.

11. En déduire que, si k et k' sont deux entiers dans $\mathbb{N}_*$ tels que $p^N \mid (k - k')$, alors

$$\Gamma_p(k) \equiv \Gamma_p(k') \pmod{p^N}.$$

12. Montrer que la fonction Γ_p s'étend de façon unique en une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ vers $\mathbb{Z}_p^\times$.

Dans les questions **12.–14.**, l'expression Γ_p désigne la fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ vers $\mathbb{Z}_p^\times$ qui prolonge la fonction définie dans (1).

13. Montrer que

$$\frac{\Gamma_p(s+1)}{\Gamma_p(s)} = \begin{cases} -s, & s \in \mathbb{Z}_p^\times, \\ -1, & s \in p\mathbb{Z}_p. \end{cases}$$

Pour $s \in \mathbb{Z}_p$, soit s_0 l'unique élément dans $\{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $s - s_0 \in p\mathbb{Z}_p$. Soit s_1 un élément de $\mathbb{Z}_p$ tel que $s - s_0 = ps_1$.

14. Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$, on a $\Gamma_p(s)\Gamma_p(1-s) = (-1)^{s_0}$.

15. Montrer que, si $m \in \mathbb{N}_*$ est un entier qui n'est pas divisible par p, alors on a

$$\frac{\prod_{h=0}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{s+h}{m}\right)}{\Gamma_p(s) \prod_{h=1}^{m-1} \Gamma_p\left(\frac{h}{m}\right)} = m^{1-s_0}(m^{-(p-1)})^{s_1}$$

pour tout $s \in \mathbb{Z}_p$. Ne pas oublier de justifier que le terme à droite de la formule est bien défini.

Troisième partie

16. Montrer que la série

$$G(s) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

converge absolument sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

17. Montrer que la série $G(s)$ diverge sur $\mathrm{Re}(s) < 0$.

18. Établir l'égalité suivante sur $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$G(s) = (2^{1-s} - 1)\zeta(s).$$

19. En déduire que la fonction $G(s)$ ($\mathrm{Re}(s) > 1$) se prolonge en une fonction entière.

20. Montrer que la série G converge simplement sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$.