Université Paris Diderot
L2MI3 Analyse et Algèbre Fondamentales
2010-2011

Contrôle de connaissance
du 3 décembre 2010 (Durée 3 h)
Documents autorisés : notes de cours/TD

La première partie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme

$$f(x) := \begin{cases} \exp(x^2) + \exp(-x^{-2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la série de Taylor $S(f)$ de f en $x = 0$.
3. Déterminer le rayon de convergence R de $S(f)$.
4. Déterminer la limite de la série $S(f)$ sur $]-R, R[$.

La deuxième partie

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit A_n la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \end{pmatrix}$$

On désigne par A_0 la matrice $(-a_0)$ qui est de taille 1×1.

5. Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer le déterminant de la matrice A_n.

Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit

$$D_n(\lambda) = \text{dét}\,(\lambda I_{n+1} - A_n),$$

où I_{n+1} est la matrice d'identité de taille $(n+1) \times (n+1)$.

6. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $D_n(\lambda) = \lambda D_{n-1}(\lambda) + a_n$.
7. Exprimer $D_n(\lambda)$ en fonction de λ et $a_0, \dots, a_n$.
8. Soient α une valeur propre de A_n et $(z_0, \dots, z_n)$ un vecteur propre (non-nul !) de A_n associé à la valeur propre α. Montrer que $z_0 \neq 0$ puis exprimer la valeur de z_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ en fonction de z_0 et α.
9. En déduire que tout espace propre de A_n est de rang 1.
10. Déterminer le polynôme minimal de A_n. **TSVP**

La troisième partie

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$. On étudie l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n+1)}(t) + a_0 y^{(n)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \qquad (*)$$

Soit V_n l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui vérifient l'équation (*).

11. Montrer que l'espace V_n est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

12. Pour tout $y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, soit $\underline{\boldsymbol{y}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n+1}$ l'application qui envoie $t \in \mathbb{R}$ en $(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t))$. Montrer que y est une solution de (*) si et seulement si $\underline{\boldsymbol{y}}$ vérifie l'équation différentielle $\underline{\boldsymbol{y}}'(t) = A_n \underline{\boldsymbol{y}}(t)$.

13. On suppose que la fonction D_n introduite dans la deuxième partie admet $n+1$ racines distinctes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Montrer que la famille de fonctions $(\exp(\alpha_k t))_{k=0}^n$ est une base de V_n.

14. Application : Déterminer l'espace des solutions de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = 0.$$

Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui vérifient cette équation différentielle.

La quatrième partie

On désigne par $\boldsymbol{S}$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{C}$) des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$. Comme dans la partie précédente, on fixe un entier $n \geqslant 1$. On désigne par W_n le sous-ensemble des suites $(z_k)_{k \geqslant 0} \in \boldsymbol{S}$ telles que

$$z_{k+n+1} + a_0 z_{k+n} + \cdots + a_{n-1} z_{k+1} + a_n z_k = 0 \quad (k \geqslant 0)$$

15. Montrer que W_n est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{S}$.

16. On suppose que le polynôme $P_n(X) := X^{n+1} + a_0 X^n + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ admet $n+1$ racines complexes distinctes $\beta_0, \ldots, \beta_n$. Montrer que les suites

$$(\beta_0^k)_{k \geqslant 0}, \ldots, (\beta_n^k)_{k \geqslant 0}$$

forment une base de W_n sur $\mathbb{C}$. On peut introduire l'application linéaire $T : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ qui envoie $(z_0, z_1, z_2, \ldots)$ en $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$.

17. Application : déterminer le terme général de la suite de Fibonacci :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \qquad (k \geqslant 0).$$

18. Déterminer le rayon de convergence r de la série entière

$$S = \sum_{k \geqslant 0} F_k z^k \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

19. Déterminer la somme de la série S sur $]-r, r[$.

20. Que peut-on dire sur W_n lorsque le polynôme P_n admet des racines multiples ?