Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices I

Exercice 1 Déterminer les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants.

1) $\varnothing$;

2) $\mathbb{R}$;

3) $\{x - \lfloor x \rfloor \mid x \in \mathbb{R}\}$;

4) $\{(1 + (-1)^n)\frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\, n \geqslant 1\}$;

5) $\{\sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}} \mid n \in \mathbb{Z},\, n \geqslant 1\}$.

Exercice 2 Soit Ω un ensemble non-vide et $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux applications. Montrer les assertions suivantes :

1) Si $f(\omega) \leqslant g(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, alors

$$\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leqslant \inf_{\omega\in\Omega} g(\omega) \quad \text{et} \quad \sup_{\omega\in\Omega} f(\omega) \leqslant \sup_{\omega\in\Omega} g(\omega).$$

2)
$$\sup_{\omega\in\Omega} \big(f(\omega) + g(\omega)\big) \leqslant \Big(\sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)\Big) + \Big(\sup_{\omega\in\Omega} g(\omega)\Big).$$

3)
$$\inf_{\omega\in\Omega} \big(f(\omega) + g(\omega)\big) \geqslant \Big(\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega)\Big) + \Big(\inf_{\omega\in\Omega} g(\omega)\Big).$$

4)
$$\sup_{\omega\in\Omega} \big(-f(\omega)\big) = -\inf_{\omega\in\Omega} f(\omega) \quad \text{et} \quad \inf_{\omega\in\Omega} \big(-f(\omega)\big) = -\sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$$

Exercice 3 Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles. On suppose que $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Montrer les assertions suivantes.

1)
$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \liminf_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2)
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Exercice 4 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres positifs. On suppose que $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ quels que soient n et m.

1) On fixe un entier $n \geqslant 1$. Montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $a_{kn+r} \leqslant ka_n + a_r$.

2) En déduire que
$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leqslant \frac{a_n}{n}$$
quel que soit $n \geqslant 1$.

3) Montre que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n}.$$

Exercice 5 1) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$ qui converge vers $z \in \mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit
$$A_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$
Montrer que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers z.

2) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle dont tous les termes sont positifs. On suppose que la suite $(a_{n+1}/a_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell > 0$. Montrer que $(a_n^{1/n})_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ aussi.

3) La réciproque de l'énoncé précédent est-elle vraie ? Pourquoi ?

4) Application : déterminer la limite de
$$\binom{2n}{n}^{1/n} \qquad (n \geqslant 1).$$

Exercice 6 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que la suite
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad (n \geqslant 1)$$
soit convergente.

1) La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

2) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

Exercice 7 1) Montrer que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2) Étudier la nature de la suite $(\sin(n\pi\sqrt{2}))_{n\geqslant 1}$. Calculer ses limites inférieure et supérieure.

3) Montrer que
$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{4q^2}$$
pour tout nombre rationnel p/q avec $q > 0$.

4) Montrer que
$$|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x| \text{ si } |x| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$
En déduire que
$$1 \geqslant |\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n} \geqslant \left(\frac{1}{2n}\right)^{1/n} \qquad (n \geqslant 1).$$
Montrer que la suite $(|\sin(n\pi\sqrt{2})|^{1/n})_{n\geqslant 1}$ est convergente. Déterminer sa limite.