Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices X

Dans cette feuille d'exercices, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 On désigne par $C^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ qui envoie f en f' est une application linéaire.
2) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est un vecteur propre de D.
3) En déduire que, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont des nombres réels distincts, alors la famille $(e^{\lambda_i t})_{i=1}^n$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ est libre.
4) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille

$$1, \cos(t), \sin(t), \cos(2t), \sin(2t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt)$$

dans $C^\infty(\mathbb{R})$ est libre.

Exercice 2 Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. Soit r le rang de V. On suppose que $r \geqslant 1$. Soient φ et ψ deux endomorphismes de V. On suppose que φ admet r valeurs propres distincts.

1) Montrer que les endomorphismes φ et ψ commutent (c'est-à-dire $\varphi\psi = \psi\varphi$) si et seulement si les vecteurs propres de φ sont des vecteurs propres de ψ.
2) Montrer que les endomorphismes φ et ψ commutent si et seulement si on peut trouver un polynôme $P \in K[X]$ tel que $\psi = P(\varphi)$.
3) Les résultats précédents sont-ils encore vrais si on suppose seulement que φ est diagonalisable.

Exercice 3 Soit V un espace vectoriel de type fini sur $\mathbb{C}$. Soit r le rang de V. On suppose $r \geqslant 1$. Soit φ un endomorphisme de V.

1) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer le spectre de $P(\varphi)$.
2) On suppose que φ^2 est diagonalisable. Montrer que φ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de type fini sur K.

1) Soit f un endomorphisme de E qui n'est pas une bijection.
   (a) Montrer qu'il existe un entier $c(f)$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{c(f)-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{c(f)})$ et que $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ pour tout entier $k \geqslant c(f)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f^{c(f)-1}) \supsetneq \mathrm{Im}(f^{c(f)-1})$ et que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^{k+1})$ pour tout entier $k \geqslant c(f)$.
   (c) Montrer que E est la somme directe de $\mathrm{Ker}(f^{c(f)})$ et $\mathrm{Im}(f^{c(f)})$.

(d) Montrer que $c(f)$ est le plus grand entier naturel c tel que X^c divise le polynôme minimal de f.

(e) Montrer que $\mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(f^{c(f)}))$ est le le plus grand entier naturel p tel que X^p divise le polynôme caractéristique de f.

(f) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(f^{k+2})) - \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(f^{k+1})) \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(f^{k+1})) - \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(f^{k})).$$

2) Soient φ un endomorphisme de E et P le polynôme caractéristique de φ, qui se décompose comme

$$P = \prod_{i=1}^{i} P_i^{\alpha_i},$$

où $P_1, \ldots, P_k$ sont des polynômes irréductibles unitaires et deux-à-deux premiers entre eux, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des entiers $\geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, soit E_i le noyau de $P_i(\varphi)$ et $\pi_i : E \to E_i$ la projection de E dans E_i le long de

$$\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} E_j.$$

(a) Montrer que π_i s'écrit comme un polynôme de φ.

(b) En déduire que tout sous-espace F de E stable par φ est somme directe de ses intersections avec les sous-espaces E_i.

Exercice 5 Soit P un polynôme de degré $\geqslant 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Soit A une matrice diagonalisable dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Montrer que l'équation $P(X) = A$ admet des solutions dans $M_{n,n}(\mathbb{C})$. Le résultat est-il encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 6 Soit A une matrice dans $M_{n,n}(K)$. Montrer que les matrices A et A^T sont semblables.

Exercice 7 Soient $(a_i)_{i=1}^n$ et $(b_i)_{i=1}^n$ des nombres réels. Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \ldots & \ldots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \ldots & a_n & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de la matrice A.

2) Montrer que, si les a_i sont strictement positif et si $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$, alors la matrice A est diagonalisable.