Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices II

Exercice 1 Montrer que les séries suivantes sont convergentes et déterminer leur sommes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \arctan \frac{1}{2n^2}$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} r^n \sin(n\theta) \quad (|r|<1,\ \theta\in\mathbb{R})$.

Exercice 2 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes positifs. Montrer que, si la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est convergente, alors il en est de même de $\sum_{n\geqslant 1} a_n^2$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs. Soit $\lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Montrer que, si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est convergente, alors il en est de même de $\sum_{n\geqslant 0} a_{\lambda(n)}$. De plus, on a

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{n\geqslant 0} a_{\lambda(n)}.$$

Exercice 4 Étudier la nature des séries suivantes (on ne cherche pas à calculer les sommes).

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!3^n}{n^n}$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$.

Exercice 5 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes strictement positifs. Pour tout entier $n\geqslant 1$, soit

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ est divergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n/S_n$ est divergente.

Exercice 6 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a_n}$$

est convergente. Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + \cdots + a_n)^2}$$

converge.

Exercice 7 Étudier la nature des séries suivantes (on ne cherche pas à calculer les sommes).

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{(\sin n)^2}{n}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2}\Big)$

Exercice 8 Soit $p > 0$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1}/n^p$ est convergente et

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \in [\tfrac{1}{2}, 1].$$

On utilisera la convexité de la fonction $f(x) = x^{-p}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à termes positifs. On suppose que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et bornée. Montrer que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \Big(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\Big)$$

est convergente.

Exercice 10 Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie comme

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.