Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices III

Exercice 1 Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries absolument convergentes. Montrer que leur produit est aussi absolument convergente.

Exercice 2 Montrer que, si une série réelle $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge mais ne converge pas absolument, alors pour tous les éléments α et β dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ avec $\alpha\leqslant\beta$, il existe une bijection $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}=\alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)}=\beta.$$

Exercice 3 Dans cet exercice, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{b}=(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites dans K, on désigne par $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ la suite dans K dont l'élément d'indice n est

$$\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

On dit qu'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dans K est de longueur finie si $a_n=0$ pour n suffisamment grand.

1) Montrer que la somme de deux suites de longueur finie est encore de longueur finie.
2) Montrer que la dilatation d'une suite de longueur finie par un scalaire dans K est encore de longueur finie.
3) Montrer que, si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont deux suites de longueur finie, alors il en est de même de $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$.
4) Soit $\boldsymbol{S}^f(0,K)$ l'ensemble des suites de longueur finie dans K. Soit en outre $K[T]$ l'ensemble des polynômes à une variable T et à coefficients dans K. Montrer que l'application de $K[T]$ vers $\boldsymbol{S}^f(0,K)$ qui envoie un polynôme $a_nT^n+a_{n-1}T^{n-1}+\cdots+a_0$ en la suite
$$a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots$$
est une bijection qui préserve l'addition, la multiplication scalaire et transforme le produit de deux polynômes en le "$\circ$"-produit de leurs images.
5) Dans la suite, on écrit formellement une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ dans K sous la forme
$$a_0+a_1T+\cdots+a_nT^n+\cdots \tag{1}$$
et on désigne par $K[\![T]\!]$ l'ensemble de toutes les suites dans K dont l'indice initial est 0. Pour simplifier les notations, les termes de coefficients 0 sont omis dans l'écriture (1) sauf si tous les termes de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sont nuls (on écrit 0 dans ce cas-là). Par exemple, $1+T^2$ désigne la suite
$$1,0,1,0,0,\ldots$$

Si $P(T)$ et $Q(T)$ sont respectivement l'écriture des suites $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sous la forme (1), alors $P(T)Q(T)$ désigne l'écriture de $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ sous la forme (1).

a. Soit $P(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_nT^n + \cdots$ un élément de $K[\![T]\!]$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer $T^mP(T)$.

b. Montrer que 1 est l'élément unité de $K[\![T]\!]$ pour la loi de composition $(P(T), Q(T)) \mapsto P(T)Q(T)$.

c. Montrer que $1 - T$ est inversible pour la loi de composition $(P(T), Q(T)) \mapsto P(T)Q(T)$ et déterminer son inverse.

d. Soit $TK[\![T]\!]$ le sous-ensemble de $K[\![T]\!]$ des éléments de la forme $TP(T)$, où $P(T) \in K[\![T]\!]$. Montrer que tout élément dans $K[\![T]\!] \setminus TK[\![T]\!]$ est inversible pour la loi de composition $(P(T), Q(T)) \mapsto P(T)Q(T)$.

Exercice 4 1) Soient m et n deux entiers, $m < n$. Soit $f : [m, n] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe un nombre $\varepsilon \in [0, 1]$ tel que

$$\sum_{m<k\leqslant n} f(k) = \int_m^n f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(f(n) - f(m)).$$

2) Application : montrer que, pour tout entier $n > 0$, il existe $\varepsilon_n \in [0, 1]$ tel que

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \varepsilon_n \ln n.$$

Exercice 5 1) Soit s un nombre réel, $s > 1$. Montrer que

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^{-s}),$$

où $\zeta(s)$ est la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$.

2) Soit s comme dans la question précédente. Montrer que

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s}).$$

3) Soit $s \in]0, 1[$. Montrer que la fonction

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s}$$

admet une limite lorsque x tend vers l'infini.

4) Soit a un nombre réel, $a \geqslant 0$. Montrer que

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} n^a = \frac{n^{a+1}}{a+1} + O(x^a).$$

5) Montrer que
$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{\ln n}{n} = \frac{1}{2}\ln(x)^2 + A + O(\ln x/x),$$
où A est une constante.

6) Montrer que
$$\sum_{2\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n\ln n} = \ln\ln x + B + O(1/(x\ln x)).$$