Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices IV

Exercice 1 Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que, pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, la boule fermé

$$\overline{B}(x; \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$$

est un fermé de X.

Exercice 2 On désigne par $|\cdot|$ la valeur absolue de $\mathbb{C}$. Montrer que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que les fonctions suivantes sont des normes sur $\mathbb{C}^n$ (considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$).

1) $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_1 := |z_1| + \cdots + |z_n|$,
2) $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_2 := \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$,
3) $\|(z_1, \ldots, z_n)\|_{\max} = \max(|z_1|, \ldots, |z_n|)$.

Exercice 4 Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ dans X est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ quels que soient $n, m \geqslant N$. On dit que l'espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy converge dans X.

1) Montrer que toute suite convergente dans X est nécessairement une suite de Cauchy.
2) Donner un exemple d'un espace métrique non-complet.
3) On suppose (X, d) complet. Soit $T : X \to X$ une application. Montrer que, s'il existe $\varepsilon \in [0, 1[$ tel que
$$\forall\, (x, y) \in X \times X, \quad d(T(x), T(y)) \leqslant \varepsilon d(x, y),$$
alors il existe un unique $x_0 \in X$ tel que $T(x_0) = x_0$.
4) Application : Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application de classe C^1 telle que
$$\sup_{x \in]0,1[} |f'(x)| < 1.$$
Alors l'equation $f(x) = x$ admet une solution dans $[0, 1]$.
5) (*Méthode de Newton*) Soit f une fonction de classe C^2 définie sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose que $\widehat{x} \in]a, b[$ est un point tel que $f(\widehat{x}) = 0$ et $f'(\widehat{x}) \neq 0$. Montrer qu'il existe un voisinage U de $\widehat{x}$ tel que, pour tout $x_0 \in U$, la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par la relation recursive
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geqslant 0)$$
converge vers $\widehat{x}$.

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions définites sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = (x^2+n^2)^{-1}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On désignera par S la somme de cette série.
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} S(x) = 0$.

Exercice 6 Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions.

1) $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ $(n \geqslant 1)$ sur $[0,1]$.
2) $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ $(n \geqslant 1)$ sur $[2,+\infty[$.
3) $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})$ $(n \geqslant 1)$ sur $\mathbb{R}$.
4) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ sur $[0,1]$.
5) $f_n(x) = nx/(1+n+x)$ $(n \geqslant 1)$ sur $[0,1]$.

Exercice 7 Soient a et b deux nombres réels, $a < b$. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit

$$f_n(x) := \frac{\lfloor nf(x)\rfloor}{n}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f.

Exercice 8 Soient a et b deux nombres réels, $a < b$. Soit f une fonction réelle de classe C^1 sur l'intervalle $]a,b[$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit

$$f_n(x) = n\Big[f\Big(x+\frac{1}{n}\Big) - f(x)\Big].$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]a,b[$ et préciser sa limite.
2) Montrer que, pour tous nombres réels α et β tels que $a < \alpha < \beta < b$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$ vers f'.
3) La suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-elle nécessairement uniformément sur l'intervalle $]a,b[$?

Exercice 9 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ définie comme

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On note $f_1 = f$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la fonction f_n de façon récurssive comme

$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)).$$

Montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0.