Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices V

Exercice 1 Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = 1/n(1 + nx)$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Est-elle convergente en 0 ?
2) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.
3) On fixe un réel strictement positif ε. Soit $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = 1/x$.
   (i) Montrer que la fonction h est bornée sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   (ii) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$.
   (iii) Montrer que la fonction f est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$.
4) Peut-on déduire de la question précédente les assertions suivantes ? Justifier votre réponse.
   (i) La fonction h est bornée sur $]0, +\infty[$.
   (ii) La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est normalement convergente sur $]0, +\infty[$.
   (iii) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2 Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que toutes les fonctions f_n sont monotones et que les séries numériques $\sum_{n\geqslant 0} f_n(a)$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n(b)$ sont absolument convergentes. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 3 Montrer que la fonction ζ de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$$

est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 4 Soit f la fonction sur $[0, +\infty[$ définie comme la somme de la série convergente $\sum_{n\geqslant 1} e^{-nx}/(1 + n^2)$.

1) Montrer que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
2) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par la série convergente

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-nx^2}.$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercice 6 Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{3^{\sqrt{n}}}$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^{2n}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z}{n(n+1)}$,

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) z^n$,

5) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\alpha)}{n!} z^n$.

Exercice 7 Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) une série entière réelle dont le rayon de convergence R. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $]-R, R[$. Montrer que cette série converge uniformément sur $[-R, R]$.

Exercice 8 Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres positifs. On suppose que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{S_n} = 1,$$

où $S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie par la série entière réelle (sur le domaine où cette série converge simplement)

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}.$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, 1]$.

2) Montrer que la fonction f est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

3) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en -1.

4) Montrer que

$$\lim_{x\to 1-} f'(x) = +\infty.$$

5) Montrer que la fonction f n'est pas dérivable à gauche en 1.