Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices VI

Exercice 1 Calculer les sommes des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nz^n$,

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n+1)^2}{n!} z^{2n+1}$,

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n!2^n} z^n$.

Exercice 2 Déterminer les sommes des séries numériques suivantes :

1) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n-1}{2^n}$,

2) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(2n+1)}$,

3) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

4) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)$.

Exercice 3 Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ la fonction telle que

$$\forall\, x \in]-1,1[\quad f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1) Montrer que f est développable en série entière en 0. Que peut-on dire du rayon de convergence R de ce développement ?
2) Montrer que f est une solution sur l'intervalle $]-1,1[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. En déduire le développement en série entière de f et la valeur de R.
3) Montrer que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)^2$ est développable en série entière en 0. Calculer ce développement, ainsi que son rayon de convergence.

Exercice 4 On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' - 2y = 0.$$

1) Soit $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que f est une solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$a_{n+2} = -\frac{n-2}{n+2} a_n$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrer qu'il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle telle que f soit développable en série entière au point 0 et que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

3) Calculer les coefficients et le rayon de convergence de la série entière obtenue dans la question précédente.

Exercice 5 Développer les fonctions suivantes en séries entières :

1) $1/(a-x)$ en $x = b \neq a$,
2) $(1+x)e^{-x}$ en $x = 0$,
3) $1/(1-x-x^2)$ en $x = 2$,
4) $\ln(1-x)^2$ en $x = 0$,
5) $\arctan(2x/(1-x^2))$ en $x = 0$.

Exercice 6 Montrer les egalités suivantes :

1)
$$\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \quad (-1 \leqslant x < 1),$$

2)
$$\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^{2n+1} \quad (-1 < x \leqslant 1),$$

3)
$$\arcsin(x)^2 = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^{2n+2}}{n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Exercice 7 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes :

1)
$$\int_0^{2\pi} \ln(1-2r\cos\theta + r^2)\,\mathrm{d}\theta \quad (0 < r < 1),$$

2)
$$\int_0^{2\pi} \ln(1-2r\cos\theta + r^2)\,\mathrm{d}\theta \quad (r > 1),$$

3)
$$\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}\,\mathrm{d}\theta.$$