Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices VII

Dans cette feuille d'exercices, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Soient V un espace vectoriel sur K et $\boldsymbol{x}$ une famille d'éléments de V.

1) Montrer que, si $\boldsymbol{x}$ est une famille libre, alors tout sous-famille de $\boldsymbol{x}$ est libre.
2) Montrer que, si $\boldsymbol{x}$ est une famille dépendente, alors toute famille contenant $\boldsymbol{x}$ est dépendente.
3) Montrer que, si $\boldsymbol{x}$ est une famille génératrice, alors toute famille contenant $\boldsymbol{x}$ est génératrice.

Exercice 2 Soient U et V deux espaces vectoriels de type fini sur K et $\varphi : U \to V$ une application K-linéaire.

1) Montrer que, si φ est injective, alors $\mathrm{rg}(U) \leqslant \mathrm{rg}(V)$.
2) Montrer que, si φ est surjective, alors $\mathrm{rg}(U) \geqslant \mathrm{rg}(V)$.
3) Montrer que, si φ est une bijection, alors $\mathrm{rg}(U) = \mathrm{rg}(V)$.

Exercice 3 Montrer que, si une application linéaire $\varphi : V \to W$ d'espaces vectoriels sur K est une bijection, alors son inverse est aussi une application linéaire.

Exercice 4 Soient V et W deux espaces vectoriels sur K, et $\varphi : V \to W$ une application linéaire. On désigne par $\mathrm{Ker}(\varphi)$ le sous-ensemble de V des éléments x tels que $\varphi(x) = 0$. On désigne par $\mathrm{Coker}(\varphi)$ l'espace quotient $W/\mathrm{Im}(\varphi)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de V.
2) On désigne par $\pi : V \to \mathrm{Ker}(\varphi)$ l'application de projection. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\bar{\varphi}$ de $V/\mathrm{Ker}(\varphi)$ vers W telle que $\varphi = \bar{\varphi}\pi$.
3) Montrer que $\bar{\varphi}$ donne une correspondance biunivoque entre $V/\mathrm{Ker}(\varphi)$ est l'image de φ.
4) Montrer que, si V est de type fini, alors
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rg}(V).$$
5) Montrer que, si V et W sont de type fini, alors
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Coker}(\varphi)) - \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \mathrm{rg}(W) - \mathrm{rg}(V).$$

Exercice 5 Soit

$$V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1}$$

des applications linéaires d'espaces vectoriel sur K. On dit que ce diagramme est une suite exacte si $\mathrm{Im}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ (comme des sous-espaces vectoriels de F) pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. On désigne par $\mathbf{0}$ l'espace vectoriel nul sur K.

1) Montrer qu'une application linéaire $f : V \to W$ d'espaces vectoriels est injective si et seulement si la suite $\mathbf{0} \longrightarrow V \xrightarrow{f} W$ est exacte.
2) Montrer qu'une application linéaire $f : V \to W$ d'espaces vectoriels est surjective si et seulement si la suite $V \xrightarrow{f} W \longrightarrow \mathbf{0}$ est exacte.
3) Soit

$$\mathbf{0} \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow \mathbf{0}$$

une suite exacte d'applications linéaires. On suppose que les espaces vectoriels V_i sont de type fini. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{rg}(V_i) = 0.$$

Exercice 6 On dit qu'un diagramme

$$V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1}$$

d'applications linéaires est un complexe si $f_i f_{i-1} = 0$ quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$.
Soit

$$\mathbf{0} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} \mathbf{0}$$

un complexe. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $H_i = \operatorname{Ker}(f_i)/\operatorname{Im}(f_{i-1})$. On suppose que les espaces vectoriels V_i sont de type fini. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{rg}(V_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{rg}(H_i).$$

Exercice 7 Soit V un espace vectoriel sur K. Soient V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriel de V.

1) Montrer que $V_1 \cap V_2$ et

$$V_1 + V_2 = \{x + y \,|\, x \in V_1,\ y \in V_2\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de V.
2) Montrer que, si $V_1 \cap V_2$ et $V_1 + V_2$ sont de type fini, alors V_1 et V_2 sont également de type fini. De plus, on a la relation suivante :

$$\operatorname{rg}(V_1 + V_2) + \operatorname{rg}(V_1 \cap V_2) = \operatorname{rg}(V_1) + \operatorname{rg}(V_2).$$