Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices VIII

Exercice 1 Soient V un espace vectoriel sur K et $\pi : V \to V$ une application linéaire telle que $\pi^2 = \pi$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(\pi) \cap \mathrm{Im}(\pi) = \{0\}$.
2) Montrer que, pour tout $x \in V$, il existe un unique $x_0 \in \mathrm{Ker}(\pi)$ et un unique $x_1 \in \mathrm{Im}(\pi)$ tels que $x = x_0 + x_1$.

Exercice 2 Soit V un espace vectoriel sur K. On appelle *forme bilinéaire* sur V toute application bilinéaire de $V \times V$ vers K. On désigne par $(V^{\otimes 2})^\vee$ l'espace vectoriel (sur K) des formes bilinéaires sur V.

1) Montrer que, si α est une forme bilinéaire sur V, alors pour tout $x \in V$, l'application α_x de V vers K qui envoie y en $\alpha(x, y)$ est une forme linéaire sur V.
2) Montrer que l'application de $(V^{\otimes 2})^\vee$ vers $L(V, V^\vee)$ qui envoie α en $(x \mapsto \alpha_x)$ est linéaire, et est une bijection.

Exercice 3 Soit V un espace vectoriel sur K.

1) Montrer que, pour tout $x \in V$, l'application $\lambda(x)$ de $V^\vee$ vers K, qui envoie une forme linéaire f en $f(x)$, est une application linéaire.
2) Montrer que, l'application $\lambda : V \to L(V^\vee, K)$ est linéaire.
3) Montrer que l'application λ est injective.
4) Montrer que, si V est de type fini, alors λ est une application bijective.

Exercice 4 Soit A un ensemble non-vide (non-nécessairement fini). On désigne par K^A l'espace des applications de A vers K. On désigne par $K^{(A)}$ la partie de K^A des applications f qui sont nulles à l'extérieure d'une partie finie de A.

1) Montrer que les espaces K^A et $K^{(A)}$, munis des lois de composition que l'on précisera, sont des espaces vectoriels sur K.
2) Montrer que l'application $\alpha : K^{(A)} \times K^A \to K$ qui envoie (f, g) en
$$\sum_{x \in A} f(x)g(x)$$
est bien définie, et est une application bilinéaire.
3) Établir une bijection linéaire entre K^A est le dual de $K^{(A)}$.
4) (faculatif) Montrer que, si A est un ensemble infini, alors il n'existe aucune bijection entre les ensembles K^A et $K^{(A)}$.

Exercice 5 Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ vers lui-même, où $n \geqslant 1$ est un entier, fixé dans cet exercice. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit
$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

On dit qu'un élément τ de $\mathfrak{S}_n$ est un transposition si le cardinale de $\{i \,|\, \tau(i) \neq i\}$ est égal à 2.

1) Calculer $\mathrm{sgn}(\tau)$ pour une transposition τ.
2) Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme une composition de transpositions.
3) Montrer que, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ s'écrit comme la composition de m transpositions, alors $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$.

Exercice 6 Soient V un espace vectoriel sur K, et $n \geqslant 1$ un entier. On désigne par $(S^n V)^\vee$ l'ensemble des formes multilinéaires f de degré n sur V qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

On désigne par $p_n : (V^{\otimes n})^\vee \to (V^{\otimes n})^\vee$ l'application qui envoie une forme multilinéaire f en

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

1) Montrer que $(S^n V)^\vee$ est un sous-espace vectoriel de $(V^{\otimes n})^\vee$.
2) Montrer que p_n est une projection de $(V^{\otimes n})^\vee$ dans $(S^n V)^\vee$.
3) Si f est une forme dans $(S^n V)^\vee$ et g est une forme dans $(S^m V)^\vee$, on désigne par fg la forme multilinéaire $p_{n+m}(f \otimes g) \in (S^{n+m} V)^\vee$.
   (i) Montrer que, si $f \in (S^n V)^\vee$, $g \in (S^m)^\vee$ et $h \in (S^k V)^\vee$, alors
   $$(fg)h = f(gh).$$
   (ii) Montrer que, si $f \in (S^n V)^\vee$ et $g \in (S^m)^\vee$, alors $fg = gf$.
   (iii) Montrer que, si V est de type fini et si $(e_i)_{i=1}^r$ est une base de V, alors
   $$(e_1^\vee)^{a_1} \cdots (e_r^\vee)^{a_r}, \qquad 0 \leqslant a_1, \ldots, a_r \leqslant n,\ a_1 + \cdots + a_r = n$$
   est une base de $(S^n V)^\vee$.
   (iv) Calculer le rang de $(S^n V)^\vee$ dans le cas où V est de type fini.

Exercice 7 Soient E et F deux espaces vectoriels sur K. Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on désigne par $\delta_{(x,y)}$ l'application de $E \times F$ vers K qui envoie (x, y) en 1 et d'autres points en 0. On désigne par I l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de $K^{(E \times F)}$ qui contiennent des éléments de la forme

$$\delta_{(\lambda x_1 + \mu x_2, y)} - \lambda \delta_{(x_1, y)} - \mu \delta_{(x_2, y)} \quad \text{et} \quad \delta_{(x, \lambda y_1 + \mu y_2)} - \lambda \delta_{(x, y_1)} - \mu \delta_{(x, y_2)},$$

où λ et μ sont dans K, $x_1, x_2, x \in E$ et $y_1, y_2, y \in F$.

1) Montrer que I est un sous-espace vectoriel de $K^{(E \times F)}$.
2) On désigne par $E \otimes F$ l'espace quotient $K^{(E \times F)}/I$. Montrer que l'application ι de $E \times F$ vers $E \otimes F$ qui envoie (x, y) en la classe de $\delta_{(x,y)}$ est une application bilinéaire.
3) Montrer que, pour tout espace vectoriel V sur K, et toute application bilinéaire $f : E \times F \to V$, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : E \otimes F \to V$ telle que $f = \widetilde{f}\iota$.