Université Paris Diderot
MI3 Analyse et Algèbre fondamentales
2010-2011

Feuille d'exercices IX

Dans cette feuille d'exercices, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 Si $(a_1, \dots, a_n)$ une famille d'éléments dans K, on désigne par $V(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1) Montrer que, si P est un polynôme de degré $n-1$ qui est de la forme

$$P(X) = X^{n-1} + Q(X),$$

où Q est un polynôme de degré $< (n-1)$, alors on a

$$V(a_1, \dots, a_n) = \text{dét} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ P(a_1) & P(a_2) & \dots & P(a_n) \end{pmatrix}$$

2) Choisir un polynôme P convenable pour montrer que

$$V(a_1, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i).$$

3) En déduire la valeur de $V(a_1, \dots, a_n)$.

4) Montrer que $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ si et seulement si $a_1, \dots, a_n$ sont distincts.

5) En déduir qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Exercice 2 Soient a, b et c trois éléments dans K. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit D_n comme le déterminant de la matrice de taille $n \times n$ comme la suite

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

On définit $D_1(a, b, c) = a$ par convention.

1) Calculer $D_2(a,b,c)$ et $D_3(a,b,c)$.
2) Montrer la relation de récurrence suivante

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}.$$

3) En déduire un le calcul de $D_n(1,1,-1)$.

Exercice 3 Soit V un espace vectoriel de type fini et non-nul sur K. On identifie V à son bidual $V^{\vee\vee}$ via la bijection linéaire ι qui envoie $x \in V$ en $(f \in V^\vee) \mapsto f(x)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\Lambda^n V$ l'espaces des formes alternées de degré n sur $V^\vee$. Dans cet exercice, on fixe un vecteur non-nul y dans V.

1) Soit $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que l'application $\delta_k : \Lambda^k V \to \Lambda^{k+1} V$ qui envoie $\alpha \in \Lambda^k V$ en $x \wedge \alpha$ est linéaire.
2) Soit $(x_1, \ldots, x_r)$ une base de V telle que $x_1 = x$. Soit $h_k : \Lambda^k V \to \Lambda^{k-1} V$ ($k \in \{2, \ldots, r\}$) l'application linéaire telle que

$$h_k(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j e_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{j-1}} \wedge x_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}.$$

   Montrer que, pour tout entier $k \in \{2, \ldots, r-1\}$, l'application

$$h_{k+1} \circ \delta_k + \delta_{k-1} \circ h_k$$

   s'identifie à l'application d'identité.
3) En déduire que la suite

$$\Lambda^1(V) \xrightarrow{\delta_1} \Lambda^2(V) \xrightarrow{\delta_2} \cdots \longrightarrow \Lambda^{r-1}(V) \xrightarrow{\delta_{r-1}} \Lambda^r(V) \longrightarrow 0$$

   est exacte.

Exercice 4 Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. Soit r le rang de V, supposé être strictement positif. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ l'application bilinéaire

$$\Lambda^i V \times \Lambda^{r-i} V \longrightarrow \Lambda^r V$$

qui envoie (α, β) en $\alpha \wedge \beta$ définit une bijection linéaire de $\Lambda^i V$ vers $(\Lambda^{r-i} V)$.

Exercice 5 Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. On suppose que V est de rang paire et que $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ est une base de V. Soit en outre

$$\omega = x_1 \wedge y_1 + \cdots + x_r \wedge y_r.$$

Calculer $\omega^{\wedge r}$.

Exercice 6 Soit V un espace vectoriel sur K. On suppose donnée une famille libre $(f_i)_{i=1}^n$ de formes linéaires sur V. Montrer que, si une famille $(g_i)_{i=1}^n$ de formes linéaires sur V vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \wedge g_i = 0,$$

alors il existe une matrice symétrique A telle que

$$(g_1, \ldots, g_n) = (f_1, \ldots, f_n)A.$$