Huayi Chen

POLYCOPIÉ DU COURS L2MI3 ANALYSE ET ALGÈBRE FONDAMENTALES

Huayi Chen
Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu.
E-mail : `chenhuayi@math.jussieu.fr`

CHAPITRE 1

SÉRIES NUMÉRIQUES

1.1. Notations et rappels

Dans ce note, l'expression K désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$.

Le corps $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre "$\leqslant$". Il est totalement ordonné par cette relation, autrement dit, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, ou bien $a \leqslant b$, ou bien $b \leqslant a$.

Le corps K est muni d'une *valeur absolue* que l'on note $|\cdot|$. Lorsque $K = \mathbb{R}$, cette valeur absolue est compatible à la relation d'ordre

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Lorsque $K = \mathbb{C}$, la valeur absolue $|\cdot|$ est définie comme

$$\forall\, a + ib \in \mathbb{C},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Elle prolonge la valeur absolue (1.1) sur $\mathbb{R}$.

Esapces vectoriels. — On appelle *espace vectoriel* sur K tout ensemble non-vide V muni d'une loi de composition interne (appelée la loi d'*addition*)

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

et d'une loi de composition externe (appelée la *multiplication par un scalaire*)

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \longrightarrow & V \\ (a, x) & \longmapsto & ax \end{array}$$

soumises aux conditions suivantes :

(1) la loi d'addition est commutative et associative :

$$\forall\, x, y, z \in V,\ x + y = y + x,\ x + (y + z) = (x + y) + z,$$

(2) il existe un élément neutre pour la loi d'addition (on vérifie facilement que l'élément neutre $\mathbf{0}$ est unique) :

$$\exists\,\mathbf{0} \in V \text{ tel que } \forall\, x \in V,\ x + \mathbf{0} = x,$$

(3) tout élément de V admet une inverse pour la loi d'addition (on vérifie facilement que l'inverse d'un élément est unique) :

$$\forall\, x \in V,\ \exists - x \in V \text{ tel que } x + (-x) = 0,$$

(4) pour tous $a, b \in K$ et tout $x \in V$, $(ab)x = a(bx)$, $(a + b)x = ax + bx$,
(5) pour tout $a \in K$ et tous $x, y \in V$, $a(x + y) = ax + ay$,
(6) pour tout $x \in V$, $1x = x$.

Les premières trois conditions signifient en fait que $(V, +, \mathbf{0})$ est un groupe commutatif.

Exercice 1.1.1. — Soit V un espace vectoriel sur K. Montrer que, pour tout $x \in V$, on a $0x = \mathbf{0}$ et $(-1)x = -x$.

Soit V un espace vectoriel sur K. On appelle *sous-espace vectoriel* de V tout sous-ensemble non-vide de V qui est stable par les lois de compositions.

Soient V et W deux espaces vectoriels sur K. Soit $\varphi : V \to W$ une application. On dit que l'application φ est K-*linéaire* si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) pour tous $x, y \in V$, on a $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2) pour tout $a \in K$ et tout $x \in V$, on a $\varphi(ax) = a\varphi(x)$.

Suites. — Soit n_0 un entier. On appelle *suite* dans K (dont l'indice initial est n_0) toute application de $\mathbb{Z} \cap [n_0, +\infty[$ vers K. L'ensemble $\boldsymbol{S}(K, n_0)$ des suites dans K est un espace vectoriel sur K. La lois d'addition et la multiplication par un scalaire sont respectivement

$$(a_n)_{n\geqslant n_0} + (b_n)_{n\geqslant n_0} := (a_n + b_n)_{n\geqslant n_0},$$
$$\lambda(a_n)_{n\geqslant n_0} := (\lambda a_n)_{n\geqslant n_0}$$

De plus, sur l'espace $\boldsymbol{S}(K, n_0)$, il y a une loi de multiplication (terme à terme)

$$(a_n)_{n\geqslant n_0}(b_n)_{n\geqslant n_0} := (a_n b_n)_{n\geqslant n_0}$$

qui est commutative, associative, et distributive par rapport à l'addition.

Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite dans K. On dit que la suite $\boldsymbol{a}$ est *bornée* s'il existe une constante $M > 0$ telle que $|a_n| \leqslant M$ quel que soit $n \geqslant n_0$. On dit que $\boldsymbol{a}$ est une *suite de Cauchy* si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \geqslant n_0,\ \forall\, n, m \in \mathbb{Z},\ m > n > N, \text{ on a } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

On dit que la suite $\boldsymbol{a}$ est *convergente* (ou *converge* dans K) s'il existe $a \in K$ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \geqslant n_0,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ n > N, \text{ on ait } |a_n - a| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

On vérifie facilement que la constante a est unique (appelée la *limite* de $\boldsymbol{a}$). Une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy. La réciproque est aussi vraie : le corps K est complet pour la valeur absolue $|\cdot|$.

L'ensemble $\boldsymbol{S}^c(K,n_0)$ des suites convergentes dans K est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{S}(K,n_0)$. L'application lim de $\boldsymbol{S}^c(K,n_0)$ vers K, qui envoie une suite convergente $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ en sa limite, est une application K-linéaire qui préserve la loi de multiplication. Si $K=\mathbb{R}$, alors cette application préserve aussi la relation d'ordre. Autrement dit, si $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ sont deux suites réelles convergentes telles que $a_n\leqslant b_n$ pour n suffisamment grand[(1)], alors

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Suite monotone. — Soit $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. On dit que la suite $\boldsymbol{a}$ est *croissante* (resp. *décroissante*) si $a_n\leqslant a_{n+1}$ (resp. $a_n\geqslant a_{n+1}$) quel que soit $n\geqslant n_0$. On dit que $\boldsymbol{a}$ est *bornée supérieurement* (resp. *bornée inférieurement*) s'il existe un nombre réel M tel que $a_n\leqslant M$ (resp. $a_n\geqslant M$) quel que soit $n\geqslant n_0$.

Proposition 1.1.2. — *Soit $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. Si la suite $\boldsymbol{a}$ est croissante et bornée supérieurement, alors elle est convergente.*

Démonstration. — Montrons la proposition par l'absurde. Supposons que la suite $\boldsymbol{a}$ est divergente. Elle n'est donc pas une suite de Cauchy. Autrement dit, il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall\, N\geqslant n_0,\ \exists\, n,m>N \text{ avec } |a_m-a_n|\geqslant 0.$$

On peut donc construire par récurrence deux suites d'indices $(n_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ et $(m_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ telles que

$$n_0<n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots$$

et que (la suite $\boldsymbol{a}$ étant croissante)

$$a_{m_\ell}-a_{n_\ell}=|a_{m_\ell}-a_{n_\ell}|\geqslant\varepsilon$$

quel que soit ℓ. Comme la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante, on obtient

$$\begin{aligned} a_{m_\ell}-a_{n_0} &= \sum_{n_0<k\leqslant m_\ell}(a_k-a_{k-1}) \geqslant \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{n_i<k\leqslant m_i}(a_k-a_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} a_{m_i}-a_{n_i}\geqslant \varepsilon\ell. \end{aligned}$$

C'est une contradiction puisque la suite est supposée être bornée supérieurement. □

Corollaire 1.1.3. — *Soit $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. Si la suite $\boldsymbol{a}$ est décroissante et bornée inférieurement, alors elle est convergente.*

[(1)] C'est plutôt une relation de préordre sur $\boldsymbol{S}^c(K,n_0)$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite $(-a_n)_{n\geqslant n_0}$. □

Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite croissante. Si la suite $\boldsymbol{a}$ n'est pas bornée supérieurement, alors elle tend vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$. De façon similaire, toute suite décroissante qui n'est pas bornée inférieurement tend vers $-\infty$.

Une conséquence importante de la convergence monotone est l'existence de la borne supérieure/inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Proposition 1.1.4. — *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Il existe un unique élément a dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1) a est un majorant de A (i.e., pour tout $x \in A$, on a $x \leqslant a$);
2) tout majorant de A est supérieur ou égal à a.

Démonstration. — L'unicité de a provient des conditions auxquelles il doit satisfaire. Montrons l'existence. Le cas où l'ensemble A n'est pas borné supérieurement (dans $\mathbb{R}$) est simple : il suffit de prendre $a = +\infty$. En outre, si $A \setminus \{-\infty\} = \varnothing$, alors tout élément de $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ est une majoration de A. Donc $a = -\infty$ vérifie les conditions comme ci-dessus.

Dans la suite, on suppose que l'ensemble $A \setminus \{-\infty\}$ est non-vide et admet au moins un majorant dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit a_n le plus petit élément dans l'ensemble

$$B_n := \{m/2^n \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

qui est un majorant de A (l'existence d'un tel nombre provient de l'hypothèse $A \neq \varnothing$). La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante (car $B_n \subset B_{n+1}$ pour tout n) et bornée inférieurement (car A est non-vide) donc converge vers un nombre $a \in \mathbb{R}$ (d'après le corollaire 1.1.3). Pour tout $x \in A$, on a $x \leqslant a_n$. Par passage à la limite, on obtient $x \leqslant a$. Donc le nombre a est effectivement un majorant de A. Si b est un majorant de A, alors pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $b \geqslant a_n - 1/2^n$. Par passage à la limite, on obtient $b \geqslant a$. □

L'élément a figurant dans la proposition précédente s'appelle la *borne supérieure* de l'ensemble A, noté $\sup A$. De façon similaire, on peut montre que A admet un plus grand minorant, noté $\inf A$ et appelé la *borne inférieure* de A.

Limites inférieure et supérieure. — Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. La suite $\big(\inf_{m\geqslant n} a_m\big)_{n\geqslant n_0}$ (dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$) est croissante, donc tend vers un élément dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, appelée la limite inférieure de $\boldsymbol{a}$, notée $\liminf_{n\to\infty} a_n$. De façon similaire, la limite supérieure de $\boldsymbol{a}$ est définie comme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\geqslant n_0}\big(\sup_{m\geqslant n} a_m\big) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}.$$

Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbb{R}$. La limite supérieure de $\boldsymbol{a}$ est $+\infty$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{a}$ n'est pas bornée supérieurement, est $-\infty$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{a}$ tend vers $-\infty$. La limite inférieure de $\boldsymbol{a}$ est $+\infty$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{a}$ tend vers $+\infty$, est $-\infty$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{a}$ n'est pas bornée inférieurement.

Proposition 1.1.5. — *Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. La suite $\boldsymbol{a}$ est convergente si et seulement si elle est bornée et si $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Démonstration. — Pour tout entier $N \geqslant n_0$, on a

$$\sup_{n>m\geqslant N} |a_n - a_m| = (\sup_{n\geqslant N} a_n) - (\inf_{n\geqslant N} a_n).$$

Si la suite $\boldsymbol{a}$ est convergente, alors elle est bornée. De plus, le critère de Cauchy montre que

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{n>m\geqslant N} |a_n - a_m| = 0.$$

On obtient donc $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Réciproquement, si la suite $\boldsymbol{a}$ est bornée (donc les limites inférieure et supérieure de $\boldsymbol{a}$ sont finies), et si $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, alors on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \sup\limits_{n>m\geqslant N} |a_n - a_m| = 0$. Donc la suite $\boldsymbol{a}$ est convergente. □

Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. Pour tout entier n, $n \geqslant n_0$, on a

$$\inf_{m\geqslant n} a_m \leqslant a_n \leqslant \sup_{m\geqslant n} a_m.$$

D'après la proposition 1.1.5, si la suite $\boldsymbol{a}$ est convergente, alors

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

En outre, pour toute sous-suite $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de $\boldsymbol{a}$, on a

$$\liminf_{k\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{k\to\infty} a_{n_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} a_{n_k} \leqslant \limsup_{k\to\infty} a_n.$$

Par conséquent, si la suite $\boldsymbol{a}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$, alors toute sous-suite de $\boldsymbol{a}$ converge vers a aussi.

Les limites linférieure et supérieure préservent les relations de (pré)ordre.

Proposition 1.1.6. — *Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles. Si $a_n \leqslant b_n$ pour tout n suffisamment grand, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \textit{et} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Démonstration. — Lorsque n est suffisamment grand (de telle sorte que $a_m \leqslant b_m$ pour tout $m \geqslant n$), on a (la justification est laissée comme un exercice)

$$\inf_{m\geqslant n} a_m \leqslant \inf_{m\geqslant n} b_m \text{ et } \sup_{m\geqslant n} a_m \leqslant \sup_{m\geqslant n} b_m$$

Par passage à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient le résultat. □

En général les limites supérieure et inférieure ne préservent pas les lois de composition des suites. Voici un exemple.

Exemple 1.1.7. — Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites réelles, où

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1} \quad (n \geqslant 1).$$

On a

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = -1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1.$$

Mais la suite $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ est constante de valeure 0, donc converge vers 0.

Bien que les limites inférieure et supérieure ne sont pas additives, elles vérifient certaines propriétés de semi-additivité.

Proposition 1.1.8. — *Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles. On suppose que la condition suivante* **n'est pas** *satisfaite*[2]*: l'une des deux suites tend vers $-\infty$ tandis que l'autre n'est pas bornée supérieurement. Alors*

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n. \tag{1.3}$$

Démonstration. — L'assertion (1.3) devient triviale si l'une des suites $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas bornée supérieurement dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, on suppose le contraire. Pour tout n, on a (la vérification est lassiée comme un exercice)

$$\sup_{m\geqslant n}(a_m + b_m) \leqslant \Big(\sup_{m\geqslant n} a_m\Big) + \Big(\sup_{m\geqslant n} b_m\Big). \tag{1.4}$$

Soient

$$A_n = \sup_{m\geqslant n} a_m, \quad B_n = \sup_{m\geqslant n} b_m, \quad C_n = \sup_{m\geqslant n}(a_m + b_m).$$

Les suites $(A_n)_{n\geqslant n_0}$, $(B_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(C_n)_{n\geqslant n_0}$ sont décroissante. Si la suite $(C_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas bornée inférieurement, alors elle tend vers $-\infty$, et l'assertion est triviale. Sinon les trois suite $(A_n)_{n\geqslant n_0}$, $(B_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(C_n)_{n\geqslant n_0}$ sont toutes bornées inférieurement, et donc convergentes. On a alors (compte tenu de (1.4))

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} C_n \leqslant \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

□

De façon similaire, on a la propriété suivante de la limite inférieure.

Proposition 1.1.9. — *Soient $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles. Alors*

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \tag{1.5}$$

pourvu que l'on ne trouve pas $(+\infty) + (-\infty)$ ou $(-\infty) + (+\infty)$ dan la partie à droite de (1.5)

[2] de sorte que l'on ne trouve pas $(+\infty) + (-\infty)$ dans la partie à droite de la formule (1.3).

1.2. Séries numériques: généralités

Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite dans K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle la *série associée* à $\boldsymbol{a}$ la suite $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ où

$$A_n := \sum_{n_0 \leqslant k \leqslant n} a_k,$$

notée $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$. On désigne par Σ l'application de $\boldsymbol{S}(K, n_0)$ vers lui-même qui envoie chaque suite $\boldsymbol{a}$ en sa série associée. C'est une application linéaire inversible. Son inverse envoie une suite $(A_n)_{n \geqslant n_0}$ en $(A_n - A_{n-1})_{n \geqslant n_0}$ (on convient que $A_{n_0 - 1} = 0$).

Si une série $\Sigma(\boldsymbol{a})$ est convergente, sa limite s'appelle la *somme* de cette série. Si la suite $\boldsymbol{a}$ est de la forme $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ et si la série associée $\Sigma(\boldsymbol{a})$ converge, l'expression $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ désigne aussi la somme de la série.

Proposition 1.2.1. — *Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite dans K. Si la série $\Sigma(\boldsymbol{a})$ est convergente, alors la suite $\boldsymbol{a}$ converge vers 0.*

Démonstration. — Si $\Sigma(\boldsymbol{a}) = (A_n)_{n \geqslant n_0}$ est convergente, elle est une suite de Cauchy. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant n_0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n > N, \text{ on ait } |a_n| = |A_n - A_{n-1}| < \varepsilon.$$

Donc la suite $\boldsymbol{a}$ converge vers 0. □

La contraposition de cette proposition montre que, si la suite $\boldsymbol{a}$ ne converge pas vers 0, alors $\Sigma(\boldsymbol{a})$ n'est pas convergente.

Définition 1.2.2. — On dit qu'une série $\Sigma(\boldsymbol{a})$, où

$$\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geqslant n_0} \in \boldsymbol{S}(K, n_0),$$

est *absolument convergente* (ou *converge absolument*) si la série $\Sigma(|\boldsymbol{a}|)$ est convergente, où $|\boldsymbol{a}|$ désigne la suite $(|a_n|)_{n \geqslant n_0}$.

Proposition 1.2.3. — *Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite. Si la série $\Sigma(\boldsymbol{a})$ converge absolument, alors elle est convergente.*

Démonstration. — Supposons que la suite $\Sigma(|\boldsymbol{a}|)$ converge. Elle est alors une suite de Cauchy. Par conséquent,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > m > N, \text{ on a } \sum_{m < k \leqslant n} |a_k| < \varepsilon,$$

d'où, pour tous n, m, $n > m > N$, on a

$$\Big| \sum_{m < k \leqslant n} a_k \Big| \leqslant \sum_{m < k \leqslant n} |a_k| < \varepsilon,$$

donc la suite $\Sigma(\boldsymbol{a})$ est convergente (car elle est une suite de Cauchy). □

1.3. Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on étude les séries associées aux suites dans $[0,+\infty[$. Une telle série est appelée une série à termes positifs.

Proposition 1.3.1. — *Une série à termes positifs $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente si et seulement si elle est bornée supérieurement.*

Démonstration. — Rappelons que si une suite $(A_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente, alors elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M>0$ telle que $|A_n|\leqslant M$ pour tout n. En particulier, si la série $\sum_{n\leqslant n_0} a_n$ est convergente, alors elle est bornée supérieurement.

Réciproquement, si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est bornée supéreurement, alors elle est nécessairement convergente car elle est une suite croissante. □

Remarque 1.3.2. — Soit $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ une série à termes positifs. Si la série est divergente, elle tend vers $+\infty$. Dans ce cas-là, on dit que la somme de cette série est $+\infty$.

Exemple 1.3.3. — On considère la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} a^n$, où a est un nombre positif. La somme partielle d'indice n de cette série est

$$A_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a^k = \begin{cases} n+1, & \text{si } a=1,\\ (1-a^{n+1})/(1-a), & \text{si } a\neq 1.\end{cases}$$

On obtient de la proposition 1.3.1 que la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} a^n$ converge si et seulement si $a<1$. Dans ce cas-là, la somme de la série vaut $1/(1-a)$.

Lorsque la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est donnée comme des valeurs d'une fonction positive décroissante f en des points entiers $\{n_0,n_0+1,\ldots\}$, la convergence de la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est équivalente à celle de l'intégrale généralisée de f sur $[n_0,+\infty[$.

Lemme 1.3.4. — *Soit f une fonction monotone définie sur un intervalle borné et fermé $[a,b]$, alors elle est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer f croissante. Soient Δ : $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ une partition de l'intervalle $[a,b]$ et $\|\Delta\|=\sup_{1\leqslant i\leqslant n}(t_i-t_{i-1})$. Soient

$$S_{\pm}(\Delta) := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \genfrac{}{}{0pt}{}{\max}{\min}\{f(t)\,|\,t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i\}\,(t_i-t_{i-1}).$$

On a $f(a)(b-a)\leqslant S_-(\Delta)\leqslant S_+(\Delta)\leqslant f(b)(b-a)$. Comme la fonction f est croissante, on a

$$\begin{aligned} S_+(\Delta)-S_-(\Delta) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)(t_i-t_{i-1}) \leqslant \|\Delta\| \sum_{1\leqslant \leqslant n}\big(f(t_i)-f(t_{i-1})\big)\\ &= \big(f(b)-f(a)\big)\|\Delta\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S_+(\Delta) - S_-(\Delta) = 0,$$

donc la fonction f est intégrable. □

Théorème 1.3.5. — *Soit f une fonction positive décroissante définie sur $[n_0, +\infty[$. La série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. De plus, dans le cas où la série est convergente, on a*

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n\geqslant n_0} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

Démonstration. — Rappelons que l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $F(x) = \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur $[n_0, +\infty[$ converge lorsque x tend vers $+\infty$, ou de façon équivalente, est bornée supérieurement (puisque la fonction f est positive). Comme la fonction f est décroissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a

$$F(n+1) = \sum_{n_0\leqslant k\leqslant n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n_0\leqslant k\leqslant n} f(k) \leqslant f(n_0) + \sum_{n_0<k\leqslant n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n_0) + F(n).$$

Donc la série $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$ est bornée supérieurement si et seulement si l'ensemble $\{F(n) \mid n \geqslant n_0\}$ est bornée supérieurement. Mais cette dernière condition revient à dire que la fonction F est bornée supérieurement car elle est croissante. Enfin, l'encadrement (1.6) provient de la formule précédent en faisant $n \to +\infty$. □

Exemple 1.3.6. — Soit σ un nombre réel. La série de Dirichlet

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\sigma}$$

est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} t^{-\sigma}\,\mathrm{d}t$ converge, i.e., si et seulement $\sigma > 1$.

Exercice 1.3.7. — Soit σ un nombre réel. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n\ln(n)^\sigma}$$

Divers critères de convergence peuvent être obtenus par comparaison. On commence par un principe général.

Théorème 1.3.8. — *Soient $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ deux séries à termes positifs telles que $a_n \ll b_n$ $(n \to +\infty)$*[(3)]*.*

1) Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ est convergente, alors il en est de même de $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$.

---

(3) Ici il s'agit du symbole de Vinogradov. L'expression $a_n \ll b_n$ $(n \to +\infty)$ signifie qu'il existe une constante positive C telle que $a_n \leqslant Cb_n$ pour n suffisamment grand.

2) Si la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geqslant n_0} b_n$ l'est aussi.

Démonstration. — La deuxième assertion est la contraposition de la première. Montrons 1). On suppose que C est une constante positive telle que $a_n \leqslant Cb_n$ pour tout entier $n \geqslant n_1$, où $n_1 \geqslant n_0$ est un entier. On obtient

$$\sum_{n\geqslant n_0} a_n \leqslant \sum_{n_0\leqslant n<n_1} a_n + C\sum_{n\geqslant n_1} b_n < +\infty.$$

La série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est bornée, donc convergente. □

La comparaison aux séries géométriques conduit aux critères de convergence suivants.

***Théorème 1.3.9* (Critère de d'Alembert).** — *Soit $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ une série à termes* **strictement** *positifs. Si*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente.

Démonstration. — La relation $\limsup_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n < 1$ signifie qu'il existe un nombre réel $r \in]0,1[$ et un entier $N \geqslant n_0$ tels que $a_{n+1}/a_n \leqslant r$ pour tout $n \geqslant N$. D'où

$$a_n \leqslant \frac{a_N}{r^N} r^n \quad (n \geqslant N).$$

Donc $a_n \ll r^n$ et la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente, compte tenu du théorème 1.3.8. □

Exemple 1.3.10. — Soit r un nombre positive. La série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{r^n}{n!}$$

converge.

Le critère de d'Alembert ne marche que pour des séries à termes strictement positifs (à partir de certain rang)[4]. Le critère de Cauchy comme la suite est valable pour les série à termes positifs généraux.

***Théorème 1.3.11* (Critère de Cauchy).** — *Soit $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ une série à termes positifs. Si*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n^{1/n} < 1,$$

alors la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n$ est convergente.

---

[4] S'il y a une infinité de zéro et une infinité de termes strictement positifs figurant dans les termes généraux de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$, alors on a nécessairement

$$\limsup_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = +\infty$$

Démonstration. — L'hypothèse du théoème montre qu'il existe $r \in]0,1[$ et un entier $N \geqslant n_0$ tels que $a_n^{1/n} \leqslant r$ dès que $n \geqslant N$. Donc pour tel n on a $a_n \leqslant r^n$. D'où la série $\sum_{n \geqslant n_0} a_n$ est convergente (compte tenu du théorème 1.3.8). □

***Exemple 1.3.12* (Nombres décimaux).** — Soit a_0 un entier. Pour tout $n \geqslant 1$, soit a_n un élément dans $\{0,1,\ldots,9\}$. La série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{10^n}$$

converge dans $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\Big(\frac{a_n}{10^n}\Big)^{1/n} \leqslant \frac{\sqrt[n]{a_n}}{10} \leqslant \frac{9}{10} < 1.$$

1.4. Sommation d'Abel

La sommation d'Abel est un outil efficace à étudier les séries à termes généraux (non-nécessairement positifs)

***Théorème 1.4.1* (Sommation d'Abel).** — *Soient $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites dans $\mathbb{C}$. Pour tout entier $m \geqslant 0$, on a*

$$\sum_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m} a_n b_n = A_{n_0+m} b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leqslant n < n_0+m} A_n (b_n - b_{n+1}), \tag{1.7}$$

où $A_n := \sum_{n_0 \leqslant k \leqslant n} a_k$ $(n \geqslant n_0)$. En particulier, si

$$\sup_{n_0 \leqslant n < n_0+m} |A_n| \leqslant A,$$

et si la suite $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ est positive et décroissante, alors

$$\Big| \sum_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m} a_n b_n \Big| \leqslant A b_{n_0}. \tag{1.8}$$

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $a_n = A_n - A_{n-1}$ (avec la convention $A_{n_0-1} = 0$). Donc

$$\begin{aligned}\sum_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m} a_n b_n &= \sum_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m} (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m} A_n b_n - \sum_{n_0+1 \leqslant n \leqslant n_0+m} A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n_0 \leqslant n \leqslant n_0+m} A_n b_n - \sum_{n_0 \leqslant n < n_0+m} A_n b_{n+1} \\ &= A_{n_0+m} b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leqslant n < n_0+m} A_n (b_n - b_{n+1}).\end{aligned}$$

Dans le cas où la suite $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ est positive et décroissante, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|A_{n_0+m}b_{n_0+m}+\sum_{n_0\leqslant n<n_0+m}A_n(b_n-b_{n+1})\Big|\\
&\leqslant |A_{n_0+m}|b_{n_0+m}+\sum_{n_0\leqslant n<n_0+m}|A_n|(b_n-b_{n+1})\\
&\leqslant A\Big(b_{n_0+m}+\sum_{n_0\leqslant n<n_0+m}(b_n-b_{n+1})\Big)=Ab_{n_0}.
\end{aligned}$$

□

Comme une application, on démontre la convergence des séries alternées.

Théorème 1.4.2. — *Soit* $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\geqslant n_0}$ *est une suite telle que* $a_na_{n+1}<0$ *et* $|a_n|\geqslant|a_{n+1}|$ *pour* n *suffisamment grand. Si la suite* $\boldsymbol{a}$ *converge vers* 0*, alors la série* $\Sigma(\boldsymbol{a})$ *est convergente.*

Démonstration. — On suppose que $a_na_{n+1}<0$ et $|a_n|\geqslant|a_{n+1}|$ pour tout entier $n\geqslant n_1$, où $n_1\geqslant n_0$ est un entier. Soit $N\geqslant n_1$ et $m\geqslant 0$ deux entiers. Si on applique la sommation d'Abel à

$$\sum_{N\leqslant n\leqslant N+m}a_n=\sum_{N\leqslant n\leqslant N+m}\operatorname{sgn}(a_n)|a_n|,$$

on obtient

$$\Big|\sum_{N\leqslant n\leqslant N+m}a_n\Big|\leqslant|a_N|.$$

Donc $\Sigma(\boldsymbol{a})$ est une suite de Cauchy pourvu que la suite $\boldsymbol{a}$ converge vers 0. □

Remarque 1.4.3. — Soit $\boldsymbol{a}=(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $a_na_{n+1}<0$ pour tout $n\geqslant n_0$ et que la suite $(|a_n|)_{n\geqslant n_0}$ soit décroissante et converge vers 0. La proposition précédente montre que la série $\sum_{n\geqslant n_0}a_n$ converge. En outre, on obtient de la sommation d'Abel que

$$\Big|\sum_{n\geqslant n_0}a_n\Big|\leqslant|a_{n_0}|.$$

Exemple 1.4.4. — Soit σ un nombre réel, $\sigma>0$. La série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^\sigma}$$

est convergente.

Plus généralement, on a le critère suivant de convergence.

Théorème 1.4.5. — *Soit* $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ *et* $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ *deux suites de nombres complexes. Si la série* $\sum_{n\geqslant n_0}a_n$ *est une suite bornée et si* $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ *est une suite à terme positifs qui est décroissante et converge vers* 0*, alors la série* $\sum_{n\geqslant n_0}a_nb_n$ *est convergente.*

Démonstration. — Supposons que A est une constante telle que

$$\Big|\sum_{n_0\leqslant k\leqslant n} a_k\Big| \leqslant A$$

quel que soit n. Si on applique la sommation d'Abel, on obtient

$$\Big|\sum_{N\leqslant n\leqslant N+m} a_n b_n\Big| \leqslant 2Ab_N$$

quels que soient $N \geqslant n_0$ et $m \geqslant 0$. La série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n b_n$ est donc convergente car elle est une suite de Cauchy. □

1.5. Le produit de Cauchy

Soient $\Sigma(\boldsymbol{a}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\Sigma(\boldsymbol{b}) = \sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à valeurs dans K (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle le *produit* (de Cauchy) de $\Sigma(\boldsymbol{a})$ et $\Sigma(\boldsymbol{b})$ la série associée à la suite du terme général

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \tag{1.9}$$

Cette nouvelle série sera notée $\Sigma(\boldsymbol{a})\cdot\Sigma(\boldsymbol{b})$ ou $\Sigma(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})$. Ainsi $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ est la suite dont le terme général est (1.9). On construit donc une loi de composition $\circ$ sur l'espace $\boldsymbol{S}(K,0)$. Par définition, cette loi de composition est commutative, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}.$$

En outre, si $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant 0}$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{c} = (c_n)_{n\geqslant 0}$ sont trois suites. Alors le terme d'indice n de $\boldsymbol{a}\circ(\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{c})$ est

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant j,k\leqslant n-i\\ j+k=n-i}} b_j c_k\Bigg) = \sum_{\substack{0\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} a_i b_j c_k.$$

On obtient donc

$$\boldsymbol{a}\circ(\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b})\circ\boldsymbol{c},$$

i.e., la loi de composition $\circ$ est *associative*. Enfin, la loi $\circ$ est *distributive* par rapport à l'addition:

$$\forall\, \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{S}(K,0),\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\circ\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{c}).$$

Dans le cadre des séries numériques, les propriétés de la loi de composition $\circ$ se traduisent comme les relations suivntes : pour tous $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{S}(K,0)$,

$$\Sigma(\boldsymbol{a})\cdot\Sigma(\boldsymbol{b}) = \Sigma(\boldsymbol{b})\cdot\Sigma(\boldsymbol{b}),$$
$$\Sigma(\boldsymbol{a})\cdot(\Sigma(\boldsymbol{b})\cdot\Sigma(\boldsymbol{c})) = (\Sigma(\boldsymbol{a})\cdot\Sigma(\boldsymbol{b}))\cdot\Sigma(\boldsymbol{c})$$
$$(\Sigma(\boldsymbol{a})+\Sigma(\boldsymbol{b}))\cdot\Sigma(\boldsymbol{c}) = \Sigma(\boldsymbol{a})\cdot\Sigma(\boldsymbol{c}) + \Sigma(\boldsymbol{b})\cdot\Sigma(\boldsymbol{c}).$$

Il n'est pas vrai en général que le produit de deux séries convergentes est encore une série convergente. Voici un contre-exemple.

Exemple 1.5.1. — Considérons la suite $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant 0}$ dont le terme général est

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (n \geqslant 1).$$

Comme $\Sigma(\boldsymbol{a})$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, on obtient que la série $\Sigma(\boldsymbol{a})$ est convergente (voir le théorème 1.4.2). Or, pour tout entier $n \geqslant 2$, le terme d'indice n de la suite $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a}$ est

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Comme $k(n-k) \leqslant n^2$, on obtient

$$|c_n| \geqslant \frac{n-1}{n}.$$

Par conséquent, la suite $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{a}$ ne converge pas vers zéro, et donc la série $\Sigma(\boldsymbol{a}) \cdot \Sigma(\boldsymbol{a})$ est divergente (voir la proposition 1.2.1).

Le théorème suivant, dû à Mertens, montre que le produit d'une série absolument convergente avec une série convergente est toujours convergent.

***Théorème 1.5.2* (Mertens)**. — *Soient $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant 0}$ et $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n\geqslant 0}$ deux séries dans K. Si $\Sigma(\boldsymbol{a})$ converge absolument et si $\Sigma(\boldsymbol{b})$ converge, alors $\Sigma(\boldsymbol{a})\cdot\Sigma(\boldsymbol{b})$ converge. De plus, la somme de la série $\Sigma(\boldsymbol{a}) \cdot \Sigma(\boldsymbol{b})$ est égale au produit des sommes des séries $\Sigma(\boldsymbol{a})$ et $\Sigma(\boldsymbol{b})$.*

Démonstration. — Soit $\boldsymbol{c} = (c_n)_{n\geqslant 0} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$. Par définition, on a

$$\forall\, k \geqslant 0, \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Soit B la somme de la série $\Sigma(\boldsymbol{b})$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N_0, \quad |B - B_n| < \varepsilon,$$

où B_n est la somme partielle d'indice n :

$$B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i.$$

Par conséquent, pour tous entiers n et N tels que $n > N \geqslant N_0$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k\leqslant n} c_k = \sum_{i+j\leqslant n} a_i b_j &= \sum_{i\leqslant n} a_i B_{n-i} \\ &= \sum_{i\leqslant n-N} a_i(B + O(\varepsilon)) + O_{N,\boldsymbol{b}}\Big(\sum_{n-N<i\leqslant n} |a_i|\Big),\end{aligned}$$

où l'expression $O_{N,\boldsymbol{b}}(\cdot)$ signifie que la constante implicite ne dépend que de N et $\boldsymbol{b}$. Donc

$$\Big|AB - \sum_{k\leqslant n} c_k\Big| = B\sum_{i>n-N} a_i + O_{\boldsymbol{a}}(\varepsilon) + O_{N,\boldsymbol{b}}\Big(\sum_{n-N<i\leqslant n} |a_i|\Big),$$

où A est la somme de la série $\Sigma(\boldsymbol{a})$. Par passage à la limite quand n tend vers l'infinie, on obtient qu'il existe une constante C qui ne dépend que de $\boldsymbol{a}$ telle que

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|AB - \sum_{k\leqslant n} c_k\Big| \leqslant C\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, la série $\Sigma(\boldsymbol{c})$ converge vers AB. □

Une application directe du théorème de Mertens est la convergence absolue du produit de deux séries absolument convergentes. La démonstration est laissée comme un exercice.

Corollaire 1.5.3. — *Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux suites dans $\boldsymbol{S}(K,0)$. Si les séries $\Sigma(\boldsymbol{a})$ et $\Sigma(\boldsymbol{b})$ convergent absolument, alors il en est de même de $\Sigma(\boldsymbol{a})\cdot\Sigma(\boldsymbol{b})$.*

1.6. Formule sommatoire d'Euler

Si les termes généreaux d'une série s'écrivent comme les valeur d'une fonction continuement différentiable, les sommes partielles de la série peut être étudiée via des intégrales. Le théorème suivant est un tel résultat, appelé la formule sommatoire d'Euler.

Théorème 1.6.1. — *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[y,x]$, alors*

$$\sum_{y<n\leqslant x} f(n) = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_y^x f'(t)\langle t\rangle\,\mathrm{d}t + f(x)\langle x\rangle - f(y)\langle y\rangle, \tag{1.10}$$

où n parcourt tous les entiers dans $]y,x]$, et l'expression $\langle u\rangle := u - \lfloor u\rfloor$ désigne la partie factorielle de u.

Démonstration. — D'abord on a

$$\int_y^x \langle t\rangle f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^{\lfloor y\rfloor+1}(t-\lfloor y\rfloor)f'(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{y<n<\lfloor x\rfloor}\int_n^{n+1}(t-n)f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor x\rfloor}^x (t-\lfloor x\rfloor)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La formule d'intégration par partie montre que

$$\int_y^{\lfloor y\rfloor+1}(t-\lfloor y\rfloor)f'(t)\,\mathrm{d}t = f(\lfloor y\rfloor+1) - \langle y\rangle f(y) - \int_y^{\lfloor y\rfloor+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De façon similaire,

$$\int_n^{n+1}(t-n)f'(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (y<n<\langle x\rangle),$$

$$\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} (t - \lfloor x \rfloor) f'(t)\,\mathrm{d}t = \langle x \rangle f(x) - \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$\int_{y}^{x} \langle t \rangle f'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{y<n\leqslant x} f(n) + \langle x \rangle f(x) - \langle y \rangle f(y) - \int_{y}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

La formule sommatoire peut être utilisé à étudier la série harmonique.

Corollaire 1.6.2. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(n^{-1}), \tag{1.11}$$

où γ est une constante (appelée la constante d'Euler).

Démonstration. — Si on applique (1.10) à la fonction $f(x) = 1/x$, on obtient

$$\sum_{1<k\leqslant n} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\langle t \rangle}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln n - \int_1^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme

$$\int_n^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2}\,\mathrm{d}t \ll \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$$

on obtient (1.11) avec

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

□

Corollaire 1.6.3. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + O(\ln(n)). \tag{1.12}$$

Démonstration. — Si on applique (1.10) à la fonction $f(x) = \ln(x)$, on obtient

$$\sum_{1<k\leqslant n} \ln(k) = \int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\langle t \rangle}{t}\,\mathrm{d}t = n\ln n - n + O(\ln n).$$

□