Huayi Chen

POLYCOPIÉ DU COURS L2MI3 ANALYSE ET ALGÈBRE FONDAMENTALES

Huayi Chen
Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu.
E-mail : `chenhuayi@math.jussieu.fr`

CHAPITRE 2

SÉRIES DE FONCTIONS

2.1. Fonctions continues

Définition 2.1.1. — Soit Ω un ensemble. Soit $\mathcal{T}$ une famille de sous-ensembles de Ω. On dit que $\mathcal{T}$ est une *topologie* sur Ω si elle vérifie les conditions suivantes :

1) $\varnothing \in \mathcal{T}$, $\Omega \in \mathcal{T}$,
2) pour toute famille (non-nécessairement finie) $(U_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, on a $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$,
3) l'intersection de deux éléments arbitraires de $\mathcal{T}$ reste dans $\mathcal{T}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ s'appelle un *espace topologique*. Les sous-ensembles de Ω dans $\mathcal{T}$ sont appelés des *ouverts* de Ω (par rapport à la topologie $\mathcal{T}$). Si F est un sous-ensemble de Ω dont le complémentaire F^c est dans $\mathcal{T}$, on dit que F est un fermé de Ω (par rapport à la topologie $\mathcal{T}$).

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique tel que Ω est non-vide. Soient x un point de Ω et A un sous-ensemble de Ω contenant x. On dit que A est un *voisinage* de x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset A$. En particulier, tout ouvert de Ω contenant x est un voisinage de x. Un tel voisinage est appelé un *voisiange ouvert* de x.

Proposition 2.1.2. — *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble U de Ω est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de tout point dans U.*

Démonstration. — La nécessité est immédiate par définition. Montrons la suffissance. Pour tout $x \in U$, il existe un ouvert U_x de Ω tel que $x \in U_x \subset U$. D'où

$$U = \bigcup_{x\in U} U_x$$

est un ouvert de Ω (on utilise le deuxième axiome de topologie). □

Soit X un ensemble non-vide. Soit

$$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$$

une application. On dit que d est une métrique sur X si elle vérifie les conditions suivantes :

1) (symétrie) $\forall\,(x,y)\in X\times X$, $d(x,y)=d(y,x)$,
2) (inégalité triangulaire) $\forall\,(x,y,z)\in X\times X\times X$, $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,
3) (séparation) $\forall\,(x,y)\in X\times X$, $d(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$.

Le couple (X,d) s'appelle un *espace métrique*.

Étant donné un espace métrique (X,d), la métrique d induit une topologie $\mathcal{T}_d$ sur X : un sous-ensemble U de X est ouvert si et seulement si

$$\forall\,x\in U,\ \exists\,\varepsilon>0 \text{ tel que } B^\circ(x;\varepsilon)\subset U, \tag{2.1}$$

où $B^\circ(x;\varepsilon):=\{y\in X\,|\,d(y,x)<\varepsilon\}$ est la boule ouverte centrée en x et de rayon ε. Montrons que la famille $\mathcal{T}_d$ des sous-ensemble U vérifiant (2.1) est une topologie sur X. En effet, par définition on a $\{\varnothing,X\}\subset\mathcal{T}_d$. De plus, si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}_d$ et si $U=\bigcup_{i\in I}U_i$, alors pour tout $x\in U$ il existe $i\in I$ tel que $x\in U_i$. Comme $U_i\in\mathcal{T}_d$, il existe $\varepsilon>0$ tel que $B^\circ(x;\varepsilon)\subset U_i\subset U$. Donc $U\in\mathcal{T}_d$. Enfin, si V_1 et V_2 sont deux éléments de $\mathcal{T}_d$ et si $x\in V_1\cap V_2$, alors il existe deux constantes strictement positives ε_1 et ε_2 tels que $B^\circ(x;\varepsilon_1)\subset V_1$ et que $B^\circ(x;\varepsilon_2)\subset V_2$. On obtient alors

$$B^\circ(x,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\subset V_1\cap V_2,$$

d'où $V_1\cap V_2\in\mathcal{T}_d$.

Soit V un espace vectoriel sur K (qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $\|\cdot\|:V\to[0,+\infty[$ est appelée une *norme* sur V si elle vérifie les conditions suivantes:

1) pour tout $a\in K$ et tout $x\in V$, on a $\|ax\|=|a|\cdot\|x\|$,
2) pour tous éléments x et y de V, on a $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,
3) pour tout $x\in V$, $\|x\|=0$ si et seulement si $x=0$.

Le couple $(V,\|\cdot\|)$ est appelé un *espace normé* sur K. On vérifie facilement que la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur K (considéré comme un espace vectoriel de rang 1 sur K). Ainsi $(K,|\cdot|)$ est un espace vectoriel normé sur K.

Exemple 2.1.3. — Pour tout entier $n\geqslant 1$, considérons l'application $\|\cdot\|_2:\mathbb{C}^n\to[0,+\infty[$ qui envoie $(z_1,\ldots,z_n)$ en

$$\sqrt{|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2}.$$

C'est une norme sur $\mathbb{C}^n$.

Étant donné un espace normé $(V,\|\cdot\|)$ sur K, la norme sur V induit une métrique d sur V telle que

$$\forall\,x,y\in V,\quad d(x,y)=\|x-y\|.$$

Ainsi tout espace normé peut être considéré comme un espace métrique.

Proposition 2.1.4. — *Soit (X,d) un espace métrique. Tout ouvert de X s'écrit comme une union de boules ouvertes.*

Démonstration. — D'abord l'ensemble vide est lui-même une boule ouverte de rayon 0. Soit U un ouvert non-vide de X. Pour tout $x \in U$, il existe un nombre $\varepsilon_x > 0$ tel que $B^\circ(x; \varepsilon_x) \subset U$. On a alors

$$U = \bigcup_{x \in U} B^\circ(x, \varepsilon_x).$$

□

Étant donné un espace topologique $(\Omega, \mathcal{T})$ dont l'ensemble sous-jacent Ω est non-vide. Il est possible de discuter la convergence d'une suite dans Ω.

Définition 2.1.5. — Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique où Ω est non-vide. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ d'éléments de Ω est *convergente* s'il existe un point $x \in \Omega$ tel que, pour tout voisinage ouvert U de x, il existe un entier $N \geqslant n_0$ tel que $x_n \in U$ quel que soit $n \geqslant N$. Le point x est appelé une *limite* de la suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$. On dit aussi que la suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers x.

Dans le cas d'un espace métrique (en particulier le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la convergence d'une suite revient à une condition similaire à (1.2).

Proposition 2.1.6. — *Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ dans X est convergente si et seulement s'il existe $x \in X$ qui vérifie la condition suivante :*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \geqslant n_0,\ \forall\, n \geqslant N, \quad d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Démonstration. — "$\Longrightarrow$" : Pour tout ε, la boule ouverte $B^\circ(x; \varepsilon)$ est un voisinage ouvert de x. Il existe donc $N \geqslant n_0$ tel que $x_n \in B^\circ(x; \varepsilon)$, i.e. $d(x_n, x) < \varepsilon$, quel que soit $n \geqslant N$.

"$\Longleftarrow$" : Soit U un voisinage ouvert de x. Par définition, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $B^\circ(x; \varepsilon) \subset U$. Il existe alors $N \geqslant n_0$ tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$, i.e., $x_n \in B^\circ(x; \varepsilon) \subset U$ quel que soit $n \geqslant N$. □

Remarque 2.1.7. — Il n'est pas vrai en général que la limite d'une suite convergente dans un espace topologique est unique. Considérons l'espace topologique $(\Omega, \mathcal{T})$ où Ω est un ensemble à deux éléments x et y, et $\mathcal{T} = \{\varnothing, \Omega\}$. Considérons la suite constante $(x_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $x_n = x$ quel que soit n. Cette suite converge évidemment vers x. En même temps, elle converge aussi vers y. En effet, le seule voisinage ouvert de y est l'espace Ω, qui contient toute la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

L'unicité de limite d'une suite est vérifiée lorsque l'espace topologique est *séparé*. Autrement dit, pour tout couple de point (x, y) dans l'espace topologique tel que $x \neq y$, il existe des voisinages ouverts de x et de y respectivement dont l'intersection est vide. Notamment tout espace métrique est séparé.

Définition 2.1.8. — Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $f : \Omega \to \Omega'$ une application. On dit que l'application f est *continue* en $x \in \Omega$ si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x. On dit que l'application f est *continue* si elle est continue en tout point de Ω.

Proposition 2.1.9. — *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) l'application f est continue,

2) l'image réciproque de tout ouvert de Ω' par f est un ouvert de Ω,

3) l'image réciproque de tout fermé de Ω' par f est un fermé de Ω.

Démonstration. — "1)$\Longrightarrow$2)": Soient V un ouvert de Ω', $U = f^{-1}(V)$. Pour tout $x \in U$, on a $f(x) \in V$. Donc V est un voisinage de $f(x)$. D'où $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Donc U est un voisiange de tout point dans U. L'ensemble U est alors un ouvert de Ω (voir la proposition 2.1.2).

"2)$\Longrightarrow$3)": Si F est un fermé de Ω', alors son complémentaire F^c est un ouvert de Ω'. Donc $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$ est un ouvert de Ω et $f^{-1}(F)$ est un fermé.

"3)$\Longrightarrow$1)": Soit $x \in \Omega$. Montrons que f est continue en x. Soient V un voisinage de $f(x)$ et $U = f^{-1}(V)$. Quitte à remplacer V par un sous-ensemble ouvert contenant $f(x)$ on peut supposer que V est lui-même un ouvert. Dans ce cas-là V^c est un fermé de Ω'. D'où $U^c = f^{-1}(V^c)$ est un fermé de Ω et U est un ouvert de Ω. □

Proposition 2.1.10. — *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, et $f : \Omega \to \Omega'$ une application. Si l'application est continue en $x \in \Omega$ et si $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite dans Ω qui converge vers x, alors la suite $(f(x_n))_{n \geqslant n_0}$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. — Soient V un voisinage de $f(x)$ et $U = f^{-1}(V)$. Par définition U est un voisinage de x. Donc il existe $N \geqslant n_0$ tel que $x_n \in U$ quel que soit $n \geqslant N$. D'où $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geqslant N$. Comme V est arbitraire, on obtient que la suite $(f(x_n))_{n \geqslant n_0}$ converge vers $f(x)$. □

La réciproque de la proposition 2.1.10 n'est pas vraie en général. C'est vraie lorsque l'espace topologique $(\Omega, \mathcal{T})$ à une base de voisinage dénombrable en x.

Proposition 2.1.11. — *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(\Omega', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $f : \Omega \to \Omega'$ une application et $x \in \Omega$. On suppose qu'il existe une famille dénombrable $(U_i)_{i \geqslant 0}$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contient l'un des U_i* (une telle famille est appelée une base de voisinages de x). *Si, pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n \geqslant n_0}$ converge vers $f(x)$, alors la fonction f est continue en x.*

Démonstration. — D'abord l'intersection de deux voisinages de x est encore un voisinage de x. Donc la famille $(U_i')_{i \geqslant 0}$ est aussi une base de voisinages de x, où

$$U_i' = \bigcap_{j=0}^{i} U_j.$$

Quitte à remplacer $(U_i)_{i\geqslant 0}$ par $(U_i')_{i\geqslant 0}$, on peut supposer que

$$U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_i \supset U_{i+1} \supset \cdots .$$

Si f n'est pas continue en x, alors il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x. Autrement dit, pour tout $i \geqslant 0$, il existe $x_i \in U_i \setminus f^{-1}(V)$. Montrons que la suite $(x_i)_{i\geqslant 0}$ converge vers x. En effet, pour tout voisinage ouvert U de x, il existe un certain indice m tel que $U_m \subset U$. Donc pour $i \geqslant m$, on a $x_i \in U_i \subset U_m \subset U$. Par l'hypothèse de la proposition, la suite $(f(x_i))_{i\geqslant 0}$ converge vers $f(x)$. Donc il existe $N \geqslant 0$ tel que $f(x_n) \in V$ quel que soit $n \geqslant N$. C'est une contradiction car alors $x_n \in f^{-1}(V)$ quel que soit $n \geqslant N$. □

Remarque 2.1.12. — Soit (X, d) un espace métrique. Tout point $x \in X$ admet une base de voisinage dénombrable qui consisite des boules ouverts $B^\circ(x, 1/n)$ $(n \geqslant 1)$.

2.2. Suite d'applications

Soient Ω un ensemble non-vide, (X, d) un espace métrique, et n_0 un entier. On appelle suite d'application de Ω vers X (dont l'indice initial est n_0) toute application de $\mathbb{Z} \cap [n_0, +\infty[$ vers $\mathrm{App}(\Omega, X)$, l'espace des applications de Ω vers X.

Définition 2.2.1. — Soient $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite d'applications de Ω vers X, et $f \in \mathrm{App}(\Omega, X)$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ *converge simplement* vers f si la suite $(f_n(\omega))_{n\geqslant n_0}$ converge (dans X) vers $f(\omega)$ quel que soit $\omega \in \Omega$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ *converge uniformément* vers f si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \geqslant n_0 \text{ tel que, } \forall\, n \geqslant N, \quad \sup_{\omega\in\Omega} d(f_n(\omega), f(\omega)) < \varepsilon.$$

Théorème 2.2.2. — *Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace topologique et (X, d) un espace métrique. On considère une suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ d'applications de Ω vers X qui converge uniformément vers une application f. Si toutes les fonctions f_n sont continues en un point $\omega_0 \in \Omega$, alors il en est de même de f.*

Démonstration. — Soit $x_0 = f(\omega_0)$. Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $f^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon))$ est un voisinage de ω. Comme la suite $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers f, il existe $N \geqslant n_0$ tel que

$$\sup_{\omega} d(f_n(\omega), f(\omega)) < \varepsilon/2$$

quel que soit $n \geqslant N$. Soit n un eniter tel que $n \geqslant N$. On a

$$d(f_n(\omega_0), f(\omega_0)) = d(f_n(\omega_0), x_0) < \varepsilon/2.$$

Donc $B^\circ(x_0, \varepsilon/2)$ est un voisinage ouvert de $f_n(\omega_0)$. Comme l'application f_n est continue en ω_0, l'enesmble $f_n^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon/2))$ est un voisinage de ω_0. En outre, si ω est un point dans $f_n^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon/2))$, alors

$$d(f_n(\omega), x_0) < \varepsilon/2,$$

d'où $d(f(\omega),x_0) \leqslant d(f(\omega),f_n(\omega)) + d(f_n(\omega),x_0) < \varepsilon$. Donc $\omega \in f^{-1}(B^\circ(x_0,\varepsilon))$. Cela montre que $f^{-1}(B^\circ(x_0,\varepsilon)) \supset f_n^{-1}(B^\circ(x_0,\varepsilon/2))$ et donc $f^{-1}(B^\circ(x_0,\varepsilon))$ est un voisinage de ω_0. □

Remarque 2.2.3. — L'énoncé du théorème précédent n'est pas vrai en général si la convergence de la suite d'application $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas uniforme. En effet, considérons la suite de fonctions continues $(x^n)_{n\geqslant 1}$ sur l'intervalle $[0,1]$. Elle converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

La fonction limite n'est pas continue sur $[0,1]$.

Théorème 2.2.4. — *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions (à valeurs réelles) définie sur I qui converge uniformément vers une fonction f. Si chaque fonction f_n $(n \geqslant n_0)$ est intégrable, alors il en est de même de f. En outre, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. — Pour toute fonction g définie sur I et toute partition $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$, on désigne par

$$S_\pm(\Delta,g) := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\{g(t) \,|\, t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}\,(t_i - t_{i-1}).$$

Soient en outre

$$\int_I^\pm g(t)\,\mathrm{d}t = \begin{matrix}\inf\\ \sup\end{matrix}\big\{S_\pm(\Delta,g) \,\big|\, \Delta \text{ est une partition de } I\big\}.$$

Rappelons que la fonction g est dite intégrable sur I si et seulement si

$$\int_I^+ g(t)\,\mathrm{d}t = \int_I^- g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, soit

$$\delta_n := \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)|.$$

Pour tout sous-ensemble I_1 de I et tout entier $n \geqslant n_0$, on a

$$\Big|\sup_{t\in I_1} f_n(t) - \sup_{t\in I_1} f(t)\Big| \leqslant \delta_n, \quad \Big|\inf_{t\in I_1} f_n(t) - \inf_{t\in I_1} f(t)\Big| \leqslant \delta_n.$$

D'où

$$\Big|\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_I^+ f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \delta_n(b-a), \quad \Big|\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_I^- f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \delta_n(b-a).$$

On en déduit

$$\Big|\int_I^+ f(t)\,\mathrm{d}t - \int_I^- f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \delta_n(b-a).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient que la fonction f est intégrable. Enfin, la relation

$$\left| \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_I^+ f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \delta_n(b-a)$$

montre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

□

Remarque 2.2.5. — L'énoncé du théorème précédent n'est pas vrai en général si la convergence de la suite d'application $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est pas uniforme. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres distincts telle que l'ensemble $\{u_n \mid n \geqslant 0\}$ s'identifie à $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{u_0, \dots, u_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est intégrable sur $[0,1]$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction limite n'est pas intégrable.

Théorème 2.2.6. — *Soient $I = [a,b]$ $(a < b)$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions réelles continues sur I. On suppose que,*

1) il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(t_0))_{n\geqslant n_0}$ converge;

2) pour tout entier $n \geqslant n_0$, la fonction f_n est dérivable sur $]a,b[$, et la suite $(f'_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément sur $]a,b[$ vers une fonction φ.

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers une fonction continue f sur I, qui est dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f' = \varphi$ sur $]a,b[$.

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant n_0$ tel que

$$|f_n(t_0) - f_m(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{t\in]a,b[} |f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

quels que soient $n, m \geqslant N$. D'après le théorème des accroissements finis, on obtient que

$$\big|(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(t_0) - f_m(t_0))\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|t - t_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

quels que soient $m, n \geqslant N$ et $t \in I$. D'où $\sup_{t\in I} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ quel que soient $n, m \geqslant N$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers une fonction f, qui est continue sur I d'après le théorème 2.2.2.

Montrons que la fonction f est dérivable sur $]a,b[$ et que $f' = \varphi$. Soit t un élément de $]a,b[$. Pour tout entier $n \geqslant n_0$, soit $\Phi_n : I \to \mathbb{R}$ la fonction

$$\Phi_n(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(t)}{x-t} & \text{si } x \neq t, \\ f_n'(t) & \text{si } x = t. \end{cases}$$

La fonction Φ_n est continue en t. En outre, d'après le théorème des accoissements finis, on a

$$\sup_{x \in I} |\Phi_n(x) - \Phi_m(x)| \leqslant \sup_{\xi \in]a,b[} |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|.$$

Donc la suite de fonction $(\Phi_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers la fonction

$$\Phi(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t)}{x-t} & \text{si } x \neq t, \\ \varphi(t) & \text{si } x = t. \end{cases}$$

D'après le théorème 2.2.2, la fonction Φ est continue en t. Donc la fonction f est dérivable en t et $f'(t) = \varphi(t)$. $\square$

2.3. Série de fonctions

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vector normé sur K (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la métrique induite par $\|\cdot\|$, c'est-à-dire que toute suite de Cauchy est convergente dans V.

Définition 2.3.1. — Soient Ω un ensemble non-vide, $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et n_0 un entier. Étant donnée une suite $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ d'application de Ω vers V, on appelle *série de fonctions* associée à $(f_n)_{n \geqslant n_0}$ la suite d'applications de Ω vers V dont le terme d'indice n est

$$(\omega \in \Omega) \longmapsto \sum_{k=n_0}^{n} f_n(\omega),$$

notée $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$. Si cette série converge simplement, sa limite est appelée la *somme* de cette série.

Soit $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions (à valeurs dans un espace de Banach $(V, \|\cdot\|)$). On dit que la série $\sum_{n \geqslant n_0} f_n$ converge *normalement* (sur Ω) si la série numérique (de termes positifs)

$$\sum_{n \geqslant n_0} \sup_{\omega \in \Omega} \|f_n(\omega)\|$$

converge dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.2. — Considérons la série de fonctions

$$\sum_{n \geqslant 0} z^n$$

à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout nombre $r \in]0,1[$, la série converge normalement sur $\overline{B}(0,r) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant r\} \subset \mathbb{C}$. En effet, on a

$$\sum_{n\geqslant 0} \sup_{|z|\leqslant r} |z^n| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Théorème 2.3.3. — *Soit $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une série de fonctions sur Ω à valeurs dans un espace de Banach $(V, \|\cdot\|)$ qui converge normalement, alors elle converge uniformément vers une fonction $f : \Omega \to V$. En particulier, si Ω est un espace topologique et si chaque application f_n est continue en $\omega \in \Omega$, alors la fonction limite f est aussi continue en ω.*

Démonstration. — Pour tout entier $n \geqslant n_0$, soit $F_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k$. On a

$$\|F_n(\omega) - F_{n+m}(\omega)\| \leqslant \sum_{n<k\leqslant n+m} \|f_k(\omega)\|. \tag{2.2}$$

Comme la série de fonctions converge normalement, on obtient que $(F_n(\omega))_{n\geqslant n_0}$ est une suite de Cauchy dans V, qui converge vers un élement de V que l'on notera $F(\omega)$. Par passage à la limite dans la formule (2.2) quand m tend vers l'infini, on obtient

$$\|F_n(\omega) - F(\omega)\| \leqslant \sum_{k>n} \|f_k(\omega)\|,$$

d'où

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|F_n(\omega) - F(\omega)\| \leqslant \sum_{k>n} \sup_{\omega\in\Omega} \|f_k(\omega)\|.$$

On obtient donc que la suite $(F_n)_{n\geqslant n_0}$ converge uniformément vers F. □

Les résultats suivants sont des conséquences immédiates du théorème 2.3.3 et des théorèmes 2.2.4 et 2.2.6.

Corollaire 2.3.4. — *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$ une suite de fonctions continues (à valeurs réelles) définie sur I qui converge normalement. Alors on a*

$$\sum_{n\geqslant n_0} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n\geqslant n_0} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 2.3.5. — *Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de fonctions réelles de classe C^1 sur I. On suppose que,*

1) il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $\sum_{n\geqslant n_0} f_n(t_0)$ converge dans $\mathbb{R}$,

2) la série $\sum_{n\geqslant n_0} f'_n$ converge normalement sur I.

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement vers une fonction de classe C^1 sur I, et on a

$$\sum_{n\geqslant n_0} f'_n = \Big(\sum_{n\geqslant n_0} f_n\Big)'.$$

2.4. Série entière

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K. On appelle *série entière* (à coefficients dans V) toute série de fonctions de K vers V de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n, \quad (z \in K,\ v_n \in V). \tag{2.3}$$

Soit S une série entière de la forme (2.3). On désigne par $A(S)$ l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} r^n \|v_n\|$$

converge. On désigne par $B(S)$ l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(r^n\|v_n\|)_{n\geqslant 0}$ soit bornée. Par définition, il est facile de voir que les ensembles $A(S)$ et $B(S)$ sont des intervalles où l'extrémité à gauche est 0.

Proposition 2.4.1. — *Soit S une série entière de la forme*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n, \quad (z \in K,\ v_n \in V).$$

On a $\sup A(S) = \sup B(S)$ *dans* $[0, +\infty]$.

Démonstration. — Si $r \geqslant 0$ est tel que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} r^n \|v_n\|$$

converge, alors la suite $(r^n\|v_n\|)_{n\geqslant 0}$ converge vers zéro, donc est nécessairement bornée. On en déduit donc $A(S) \subset B(S)$. Il suffit alors montrer que tout majorant de $A(S)$ est également un majorant de $B(S)$.

Soit R un majorant de $A(S)$. Si r est un élément de $B(S)$, alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} r^n \|v_n\| (1-\varepsilon)^n$$

est convergente. Par conséquent, $r(1-\varepsilon) \in A(S)$ et donc $r(1-\varepsilon) \leqslant R$. Comme ε est arbitraire, on obtient $r \leqslant R$. □

Définition 2.4.2. — Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et S une série entière à coefficients dans V. On appelle le *rayon de convergence* de S la borne supérieure de l'ensemble $A(S)$ (qui est égale à la borne supérieure de l'ensemble $B(S)$, d'après la proposition 2.4.1), noté $R(S)$.

Proposition 2.4.3. — *Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et S une série entière à coefficients dans V, dont le rayon de convergence $R(S)$ est strictement positif. Alors la série de fonction S converge simplement sur $B^\circ(0; R(S))$ vers une fonction continue. En outre, cette convergence est normale, donc uniforme sur toute boule fermée $\overline{B}(0; r) = \{z \in K \mid |z| \leqslant r\}$ pour $0 < r < R(S)$.*

Démonstration. — Par définition (de $A(S)$ et de $R(S)$) la série S converge normalement sur toute boule fermée $\overline{B}(0;r) = \{z \in K \mid |z| \leqslant r\}$ pour $0 < r < R(S)$. Donc la fonction limite est continue sur $B^0(0;r)$. Comme r est arbitraire, on obtient que la série S converge simplement sur $B^\circ(0;R(S))$ et que la fonction limite est continue. □

Le théorème suivant propose une formule qui calcule le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 2.4.4. — *Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K et S une série entière à coefficients dans V de la forme*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n, \quad (z \in K,\ v_n \in V).$$

On a

$$R(S) = (\limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{1/n})^{-1}.$$

Démonstration. — Soit r un nombre positif tel que la suite $(r^n\|v_n\|)_{n\geqslant 0}$ soit bornée (autrement dit, $r \in B(S)$). On a alors

$$\limsup_{n\to+\infty} r\|v_n\|^{1/n} \leqslant 1.$$

Par conséquent, si $r > 0$, alors

$$r \limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{1/n} = \limsup_{n\to+\infty} r\|v_n\|^{1/n} \leqslant 1.$$

On obtient donc que

$$R(S) \leqslant (\limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{1/n})^{-1}.$$

Si r est un nombre réel tel que

$$0 \leqslant r < (\limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{1/n})^{-1},$$

alors on a

$$\limsup_{n\to+\infty} r\|v_n\|^{1/n} \leqslant r \limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{1/n} < 1.$$

D'où il existe $\varepsilon \in]0,1[$ et un indice $N \geqslant 0$ tels que

$$r\|v_n\|^{1/n} \leqslant 1 - \varepsilon \text{ et donc } r^n\|v_n\| \leqslant (1-\varepsilon)^n$$

quel que soit $n \geqslant N$. Par conséquent, la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} r^n \|v_n\|$$

est convergente, et $r \in A(S)$. D'où

$$(\limsup_{n\to+\infty} \|v_n\|^{1/n})^{-1} \leqslant R(S).$$

□

Corollaire 2.4.5. — *Soient* $(V, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach sur* K *et* S *une série entière à coefficients dans* V *de la forme*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n, \quad (z \in K,\ v_n \in V \setminus \{0\}).$$

Si la suite $(\|v_n\|/\|v_{n+1}\|)_{n\geqslant 0}$ *converge vers un nombre* $\ell \in [0, +\infty]$*, alors le rayon de convergence de* S *est* ℓ*.*

Démonstration. — La condition du corollaire montre que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/n} = \ell^{-1}.$$

□

2.5. Opérations sur les séries entières

Dans ce paragraphe, on discute les opérations algébriques sur les séries entières.

2.5.1. Addition, dérivation et intégration. — Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K. On désigne par $\mathrm{SE}(V)$ l'espace des séries entières à coefficients dans V. Si

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} z^n v'_n$$

sont deux séries entières dans $\mathrm{SE}(V)$, on définit leurs somme comme la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n + \sum_{n\geqslant 0} z^n v'_n := \sum_{n\geqslant 0} z^n (v_n + v'_n).$$

Si λ est un élément dans K et si S est une série entière dans $\mathrm{SE}(V)$ qui est de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n,$$

on désigne par λS la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n (\lambda v_n).$$

Il s'avère que l'espace $\mathrm{SE}(V)$, muni de ces deux lois de comoposition, est un espace vectoriel sur K.

Proposition 2.5.1. — *Soit* $(V, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach. Pour toutes séries* S *et* S' *dans* $\mathrm{SE}(V)$*, on a*

$$R(S + S') \geqslant \min(R(S), R(S')). \tag{2.4}$$

Pour toute série $S \in \mathrm{SE}(V)$ *et tout* $\lambda \in K^\times$*, on a* $R(\lambda S) = R(S)$*.*

Démonstration. — Supposons que les séries S et S' sont respectivement de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} z^n v'_n.$$

Pour tout nombre $r \geqslant 0$ tel que les suites $(r^n\|v_n\|)_{n\geqslant 0}$ et $(r^n\|v'_n\|)_{n\geqslant 0}$ sont bornées, alors la suite $(r^n\|v_n + v'_n\|)_{n\geqslant 0}$ est également bornée puisque

$$\|v_n + v'_n\| \leqslant \|v_n\| + \|v'_n\|.$$

On obtient donc (2.4).

Soit S une série de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n.$$

On a

$$\limsup_{n\to\infty} \|\lambda v_n\|^{1/n} = (\lim_{n\to\infty} \lambda^{1/n})(\limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/n}) = \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/n}.$$

D'où $R(\lambda S) = R(S)$. □

Soit S une série entière de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n.$$

On désigne par $D(S)$ la série

$$\sum_{n\geqslant 1} z^{n-1}(nv_n),$$

appelée la *dérivée* de S. On désigne par $I(S)$ la série

$$\sum_{n\geqslant 0} z^{n+1}((n+1)^{-1}v_n),$$

appelée l'*intégrale* de S.

Proposition 2.5.2. — *Pour toute série $S \in \mathrm{SE}(V)$, on a*

$$R(D(S)) = R(I(S)) = R(S). \tag{2.5}$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|nv_n\|^{1/(n-1)} &= (\lim_{n\to\infty} n^{1/(n-1)})(\limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/(n-1)}) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/(n-1)} = \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/n}.\end{aligned}$$

De façon similaire, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \|(n+1)^{-1}v_n\|^{1/(n+1)} &= (\lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1/(n+1)})(\limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/(n+1)}) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/(n+1)} = \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^{1/n}.\end{aligned}$$

On obtient donc (2.5). □

2.5.2. Multiplication. — Si

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} z^n b_n$$

sont deux séries entières dans $\mathrm{SE}(K)$, on définit leurs produit comme la série entière

$$\Big(\sum_{n\geqslant 0} z^n a_n\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} z^n b_n\Big) := \sum_{n\geqslant 0} z^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 2.5.3. — *Soient S et S' deux séries entières dans* $\mathrm{SE}(K)$*. On a*

$$R(SS') \geqslant \min(R(S), R(S')). \tag{2.6}$$

Démonstration. — Si $r \geqslant 0$ est un nombre réel tel que les séries $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |b_n| r^n$ soient convergentes, alors la série numérique

$$\sum_{n\geqslant 0} r^n \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}|$$

est également convergente (voir le corollaire 1.5.3). Par conséquent, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} r^n \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big|$$

est convergente. D'où (2.6). □

2.5.3. Translation. — Soient a un élément de K et $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K. On appelle série entière translatée en a (à coefficients dans V) toute série de fonction de la forme

$$\sum_{n\geqslant 0} (z-a)^n v_n, \qquad (z \in K,\ v_n \in V). \tag{2.7}$$

L'espace des séries entières translatées en a est noté $\mathrm{SE}(a; V)$. C'est un espace vectoriel sur K. En outre, l'application $T_a : \mathrm{SE}(V) \to \mathrm{SE}(a; V)$, qui envoie $\sum_{n\geqslant 0} z^n v_n$ en $\sum_{n\geqslant 0}(z-a)^n v_n$, est une application K-linéaire bijective.

Soit S une série dans $\mathrm{SE}(a; V)$. On appelle *rayon de convergence* de S le nombre $R(T_a^{-1}(S))$, noté aussi $R(S)$. C'est le rayon de convergence de la série entière dont la translatée en a coïncide avec S. Il s'avère que la série S converge simplement vers une fonction continue sur $B^\circ(a; R(S))$ et cette convergence est normale sur toute boule centrée en a et de rayon $< R(S)$.

Les operations sur $\mathrm{SE}(V)$ que nous avons vus plus haut se généralisent naturellement sur l'espace des séries entières translatées. Notamment, pour toutes séries

$S = \sum_{n\geqslant 0}(z-a)^n v_n$ et $S' = \sum_{n\geqslant 0}(z-a)^n v'_n$ dans $\mathrm{SE}(a;V)$, et $\lambda \in K$, on définit

$$S + S' := \sum_{n\geqslant 0}(z-a)^n(v_n + v'_n), \tag{2.8}$$

$$\lambda S := \sum_{n\geqslant 0}(z-a)^n(\lambda v_n), \tag{2.9}$$

$$D(S) := \sum_{n\geqslant 1}(z-a)^{n-1}(nv_n), \tag{2.10}$$

$$I(S) := \sum_{n\geqslant 0}(z-a)^{n+1}((n+1)^{-1}v_n). \tag{2.11}$$

En outre, si $S = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-a)^n$ et $S' = \sum_{n\geqslant 0} b_n(z-a)^n$ sont deux séries entières dans $\mathrm{SE}(a;K)$, on définit

$$SS' := \sum_{n\geqslant 0}(z-a)^n \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k b_{n-k}.$$

2.5.4. Comportement des fonctions limites. — Les résultats que nous avons obtenu dans le paragraphe §2.3 conduisent immédiatement aux propositions suivantes.

Proposition 2.5.4. — *Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K et $a \in K$.*

1) Si S et S' sont deux séries entières dans $\mathrm{SE}(a;V)$, alors la série $S + S'$ converge sur $B^\circ(a;\min(R(S), R(S')))$ vers une fonction continue, qui s'identifie à la somme des fonctions limites des séries S et S'.

2) Si λ est un élément de K et si $S \in \mathrm{SE}(a;V)$, alors la série λS converge sur $B^\circ(a;\min(R(S), R(S')))$ vers la fonction limite de la série S multipliée par λ.

Démonstration. — Ce sont des conséquences immédiates de la proposition 2.5.1 et du théorème 2.3.3. □

Proposition 2.5.5. — *Soit a un nombre réel. Soit S une série entière dans $\mathrm{SE}(a;\mathbb{R})$ dont le rayon de convergence est $R > 0$.*

1) La série S converge sur $]a-R, a+R[$ vers une fonction lisse f.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}$ est la somme de la série $D^n(S)$.

3) La série $I(S)$ converge sur $]a-R, a-R[$ vers la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. — Pour tout $r \in [0, R[$, les séries S et $D(S)$ convergent normalement sur $]-r, r[$. En outre, $D(S)$ est obtenue en dérivant la série S terme à terme. D'après le corollaire 2.3.5, on obtient que la série S converge vers une fonction f qui est de classe C^1 et f' est égal à la limite de la série $D(f)$. Comme $D(f)$ et f ont le même rayon de convergence, par récurrence on obtient 1) et 2). Enfin, 3) est une conséquence du corollaire 2.3.4. □

Proposition 2.5.6. — *Soit a un élément de K. Soient S et S' deux séries entières dans* $\mathrm{SE}(a;K)$*. Soit $R=\min(R(S),R(S'))$. La série SS' converge vers une fonction continue sur $B^\circ(a;R)$, qui s'identifie au produit des fonctions limites de S et de S'.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.5.3 et de la proposition 2.5.3. □

2.6. Série de Taylor

Soit f un fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I. On suppose que f est de classe C^∞ dans un voisinage de $a \in I$. On appelle *série de Taylor* de f en a la série entière (dans $\mathrm{SE}(a;\mathbb{R})$)

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{2.12}$$

On utilise l'expression

$$f \sim \sum_{n\geqslant 0} b_n (x-a)^n$$

pour désigner le fait que la série $\sum_{n\geqslant 0} b_n(x-a)^n$ est la série de Taylor de f en a.

La somme partielle

$$S_{f,n}(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} b_k(x-a)^k$$

est un polynôme de degré n. Il est caractérisé par la relation suivante:

$$f^{(k)}(a) = S_{f,n}^{(k)}(a) \text{ quel que soit } k\in\{0,\dots,n\}. \tag{2.13}$$

La proposition suivante résulte directement de la définition de série de Taylor.

Proposition 2.6.1. — *Soient a un nombre réel et f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de a. Soit S la série de Taylor en a de la fonction f.*

1) La série $D(S)$ est la série de Taylor en a de la fonction f'.
2) Soit F la fonction primitive de f qui vaut 0 *en a. Alors $I(S)$ est la série de Taylor en a de la fonction F.*

Voici une liste de séries de Taylor de certaines fonctions avec leurs rayons de convergence R.

$$\exp(x) \sim \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad R = +\infty \tag{2.14}$$

$$\sin(x) \sim \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad R = +\infty, \tag{2.15}$$

$$\cos(x) \sim \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad R = +\infty, \tag{2.16}$$

$$\ln(1+x) \sim \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad R = 1, \tag{2.17}$$

$$\arctan(x) \sim \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad R = 1. \tag{2.18}$$

Proposition 2.6.2. — *Soit a un nombre réel. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ dans un voisinage de a et λ un nombre réel dont les séries de Taylor en a de f et de g sont respectivement S_f et S_g. On a*

$$f + g \sim S_f + S_g, \quad \lambda f \sim \lambda S_f, \quad fg \sim S_f S_g.$$

Démonstration. — Ces trois relations résultent respectivement des égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
(f+g)^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a),\\
(\lambda f)^{(n)}(a) &= \lambda f^{(n)}(a),\\
(fg)^{(n)}(a) &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.3. — *Soient a et b deux nombres réels, P un polynôme tel que $P(a) = b$. Soit f une fonction de classe C^∞ et*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (x-b)^n$$

sa série de Taylor en b. Alors la série de Taylor en a de la fonction $f \circ P$ est

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (P(x) - b)^n. \tag{2.19}$$

Démonstration. — La fonction P étant lisse sur $\mathbb{R}$ et envoie a en b, f étant de classe C^∞ dans un voisinage de b la fonction composée $f \circ P$ est de classe C^∞ dans un voisiange de a.

Il suffit de montrer que, si on reécrit (2.19) en une série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n \in \mathrm{SE}(a;\mathbb{R}),$$

alors sa somme partielle d'indice n

$$S_n(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} c_k(x-a)^k$$

vérifie la relation

$$\forall\, k \in \{0,\dots,n\}, \qquad S_n^{(k)}(a) = (f\circ P)^{(k)}(a). \tag{2.20}$$

Soit

$$T_n(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k(x-b)^k.$$

Comme $P(x)-b$ est un polynôme divisible par $(x-a)$, on obtient que $T_n(P(x))-S_n(x)$ est un polynôme divisible par $(x-a)^n$. Comme

$$\forall\, k\in\{0,\dots,n\}, \qquad T_n^{(k)}(b) = f^{(k)}(b),$$

on obtient (2.20) puisque $(f\circ P)^{(k)}(a)$ et $(T_n\circ P)^{(k)}$ s'écrivent comme le même polynôme (de plusieurs variables, qui ne dépend que de k) évalué en $f(b) = T_n(b),\dots,f^{(k)}(b) = T_n^{(k)}(b), P(a),\dots,P^{(k)}(a)$. □

Exemple 2.6.4. — La série de Taylor en 0 de la fonction $f(x) = 1/(1-x)$ est $\sum_{n\geqslant 1} x^n$. Par la proposition 2.6.3, on obtient que la série de Taylor en 0 de la fonction $f(x) = 1/(1-x^3)$ est $\sum_{n\geqslant 0} x^{3n}$.

Étant donnée une fonction f de classe C^∞ dans un voisiange d'un nombre reel a, il est naturel de se demander si la série de Taylor en a de la fonction f converge vers la fonction f dans un voisinage convenable de a. Ce problème peut être décomposé en deux questions: d'abord, est-ce que la série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif; ensuite, est-ce que la somme de la série coïncide avec f? Il s'avère que aucune de ces deux questions n'a une réponse positive dans toute la généralité. Voici des contre-exemples.

Exemple 2.6.5. — Considérons la série de fonctions

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n^2x)}{e^n}$$

qui converge normalement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $k\geqslant 0$, la dérivée terme-à-terme d'ordre k de cette série est normalement convergente car son terme général est borné par $n^{2k}e^{-n}$. On en déduit que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En outre, pour tout entier impair k, on a

$$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n}n^{2k} \geqslant e^{-2k}(2k)^{2k}.$$

Donc, pour k pair
$$\Big(\frac{|f^(k)(0)|}{k!}\Big)^{1/k} \geqslant \Big(\frac{e^{-2k}(2k)^{2k}}{k^k}\Big)^{1/k} = 4e^{-2}k.$$
On obtient donc
$$\limsup_{k\to\infty}\Big(\frac{|f^(k)(0)|}{k!}\Big)^{1/k} = +\infty,$$
d'où la série de Taylor en 0 de f a pour rayon de convergence 0.

Exemple 2.6.6. — Considérons la fonction
$$f(x) = \begin{cases}\exp(-1/x^2), & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$
La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. En outre, pour tout $n \geqslant 0$, il existe un polynôme P_n tel que
$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)\exp(-1/x^2)$$
sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. D'où on a
$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$
Par récurrence on obtient que la fonction est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ quel que soit $n \geqslant 0$. Par conséquent, la série de Taylor en 0 de la fonction f est la série nulle, qui admet pour rayon de convergence $+\infty$. Mais la fonction f est non-nul sauf en 0. Donc sa série de Taylor ne converge en aucun point de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ vers f.

D'après le théorème de Taylor-Lagrange, on obtient un critère de convergence pour la série de Taylor d'une fonction.

Théorème 2.6.7. — *Soient a un nombre réel et f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]a-R, a+R[$, où $R \in [0,+\infty]$. Soit S la série de Taylor en a de f. Si, pour $r \in [0,R[$, la suite*
$$\sup_{x\in[a-r,a+r]} |f^{(n)}(x)|\frac{r^n}{n!} \qquad (n \geqslant 1)$$
est bornée, alors la série S converge sur $]a-R, a+R[$ vers f, et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné contenu dans $]a-R, a+R[$.

Démonstration. — Supposons que la série S est de la forme
$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-a)^n,$$
où $a_n = f^{(n)}(a)/n!$. On obtient de la condition du théorème que le rayon de convergence de la série S est supérieur ou égal à R. Donc la série S converge simplement sur $]a-R, a+R[$, et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné contenu dans $]a-R, a+R[$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit S_n la somme partielle

$$S_n(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k (x-a)^k.$$

D'après le théorème de Taylor-Lagrange, on obtient

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_x(x-a))}{n!}(x-a)^n,$$

où θ_x est un nombre dans $[0,1[$. Soit $r \in [0, R[$ tel que $r > r_x := |x-a|$. On a

$$|f(x) - S_{n-1}(x)| \leqslant \sup_{|y-a| \leqslant r} |f^{(n)}(y)| \frac{r_x^n}{n!} = \Big(\sup_{|y-a| \leqslant r} |f^{(n)}(y)| \frac{r^n}{n!} \Big) \Big(\frac{r_x}{r} \Big)^n,$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ puisque la suite

$$\sup_{y \in [a-r, a+r]} |f^{(n)}(y)| \frac{r^n}{n!} \qquad (n \geqslant 1)$$

est bornée. On obtient alors

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x).$$

□

Voici quelques exemples.

$$\exp(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

$$\sin(x) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

$$\cos(x) \sim \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

$$\ln(1+x) \sim \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in]-1,1[, \tag{2.24}$$

$$\arctan(x) \sim \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in]-1,1[. \tag{2.25}$$