Huayi Chen

POLYCOPIÉ DU COURS L2MI3 ANALYSE ET ALGÈBRE FONDAMENTALES

Huayi Chen
Université Paris Diderot, Institut de Mathématiques de Jussieu.
E-mail : `chenhuayi@math.jussieu.fr`

CHAPITRE 3

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

3.1. Rang

Dans ce paragraphe, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par K^n le produit cartésien de n-copies de K (si $n = 0$, l'espace K^n réduit à l'ensemble à un élément $\{0\}$). C'est un espace vectoriel sur K dont les lois de composition sont

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit e_i l'élément

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

où le nombre 1 figure en la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Avec cette notation, tout élément $(a_1, \ldots, a_n)$ de K^n s'écrit sous la form

$$(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

L'ensemble $(e_i)_{i=1}^n$ s'appelle la *famille canonique* de K^n.

Étant donné un espace vectoriel V sur K et une famille $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n$ d'éléments de V, on désigne par $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ l'application linéaire de K^n vers V qui envoie $(a_1, \ldots, a_n)$ en

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

En particulier, cette application envoie e_i en x_i. L'image de $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ est un sous-espace vectoriel de V, appelé le sous-espace engendré par $\boldsymbol{x}$. On dit que la famille $\boldsymbol{x}$ est *libre* si l'application $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ est injective; *dépendente* si elle n'est pas libre; *génératrice* si $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ est surjective. On dit que $\boldsymbol{x}$ est une *base* de V si l'application $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ est une bijection. En particulier, la famille canonique $(e_i)_{i=1}^n$ est une base de K^n, appelée aussi la *base canonique* de K^n.

Rappelons qu'une application linéaire $\varphi : V \to V'$ entre des espaces vectoriels sur K est injective si et seulement si son noyau, défini comme

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\},$$

réduit à $\{0\}$. En effet, si φ est injective, alors $\varphi(x) = 0$ entraîne $x = 0$ car $\varphi(0) = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique $x = y$ car $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = 0$.

On dit qu'un espace vectoriel V sur K est *de type fini* s'il existe une famille finie d'éléments de V qui est génératrice.

Lemme 3.1.1. — *Soient V un espace vectoriel sur K et $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n$ une famille libre dans V, où $n \geqslant 0$ est un entier. Si y est un élément de V tel que la famille $(\boldsymbol{x}, y)$ ne soit pas libre, alors y est contenu dans le sous-espace engendré par $\boldsymbol{x}$.*

Démonstration. — Comme la famille $(\boldsymbol{x}, y)$ n'est pas libre, il existe un élément $a = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ de K^n tel que $\Phi_{(\boldsymbol{x},y)}(a) = 0$. Comme la restriction de $\Phi_{(\boldsymbol{x},y)}$ à K^n (plongé dans K^{n+1} via l'application $b \mapsto (b, 0)$), qui s'identifie à $\Phi_{\boldsymbol{x}}$, est injective, on obtient que $a_{n+1} \neq 0$. La relation

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_{n+1} y = 0$$

entraîne donc

$$y = a_{n+1}^{-1} a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1}^{-1} a_n x_n.$$

D'où y est dans l'image de $\Phi_{\boldsymbol{x}}$. □

Lemme 3.1.2. — *Soient V un espace vectoriel sur K et $\boldsymbol{x} = (x_\ell)_{i=1}^n$ une famille d'éléments dans V, où $n \geqslant 2$ est un entier. Soient i et j deux indices dans $\{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, et $\lambda \in K$. Soit $\boldsymbol{x}' = (x'_\ell)_{i=1}^n$ la famille telle que*

$$x'_\ell = \begin{cases} x_\ell & \text{si } \ell \neq j, \\ x_j + \lambda x_i & \text{si } \ell = j. \end{cases}$$

Alors la famille $\boldsymbol{x}$ est libre si et seulement si $\boldsymbol{x}'$ est libre.

Démonstration. — La situation étant symétrique, il suffit de montrer que, si la famille $\boldsymbol{x}$ est dépendente, alors il en est de même de $\boldsymbol{x}'$. Soit $(a_1, \dots, a_n)$ un élément non-nul de K^n tel que

$$\Phi_{\boldsymbol{x}}(a) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Soit $b = a - \lambda a_j e_i$. On a

$$\Phi_{\boldsymbol{x}'}(b) = \Phi_{\boldsymbol{x}}(a) - \lambda a_j x_i + \lambda a_j x_i = 0.$$

En outre, si $a_j \neq 0$, alors $b \neq 0$; sinon $b = a \neq 0$. On en déduit donc que la famille $\boldsymbol{x}$ est dépendente. □

Théorème 3.1.3. — *Soit V un espace vectoriel de type fini sur K.*

1) Toute famille génératrice dans V contient une base de V. Par conséquent, V admet une base.

2) Si $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^n$ est une base de V, alors toute famille de cardinale $> n$ dans V est dépendente. Par conséquent, toutes les bases de V ont le même cardinale.

Démonstration. — 1) Montrons par récurrence que toute famille génératrice $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^N$ contient une base de V. Le cas où $N = 0$ est triviale. Dans la suite, on suppose $N \geqslant 1$. Si la famille $(x_i)_{i=1}^N$ est libre, alors elle est déjà une base de V. Dans le cas contraire, on désigne par m le premier indice dans $\{1, \ldots, N\}$ tel que $(x_1, \ldots, x_m)$ ne soit pas libre. D'après le lemme 3.1.1, on obtient que x_m est dans le sous-espace de V engendré par $(x_1, \ldots, x_{m-1})$. Donc la famille

$$\boldsymbol{x'} = (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_N)$$

est également génératrice. Par l'hypothèse de récurrence, on obtient que la famille $\boldsymbol{x'}$ contient une base de V, et donc il en est de même de $\boldsymbol{x}$.

2) Soient $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1}^n$ une base de V et $\boldsymbol{v} = (v_j)_{j=1}^{n+1}$ une famille d'éléments de V. Montrons que la famille $\boldsymbol{v}$ est dépendente par récurrence en n. L'assertion est triviale lorsque $n = 0$. Dans la suite, on suppose $n \geqslant 1$. Comme la famille $\boldsymbol{u}$ est génératrice, il existe des éléments $(a_{ji})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$ tels que

$$v_j = a_{j1}u_1 + \cdots + a_{jn}u_n.$$

Supposons que la famille $\boldsymbol{v}$ est libre. En particulier, on a $v_1 \neq 0$. Donc il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_{1i} \neq 0$. Quitte à changer l'ordre des $(u_\ell)_{\ell=1}^n$ on peut supposer que $a_{1n} \neq 0$. Soit $v_1' = v_1$ et

$$v_j' = v_j - a_{jn}a_{1n}^{-1}v_1 \quad (1 < j \leqslant n+1).$$

D'après le lemme 3.1.2, la famille $(v_j')_{j=1}^{n+1}$ est libre. En particulier, $\boldsymbol{v'} := (v_j')_{j=2}^{n+1}$ est une famille libre. Or $\boldsymbol{v'}$ est contenu dans le sous-espace V' de V engendré par $\boldsymbol{u'} = (u_1, \ldots, u_{n-1})$. La famille $\boldsymbol{u'}$ est une base de V' car elle est libre et génératrice (dans V'). Par l'hypothèse de récurrence, la famille $\boldsymbol{v'}$ est dépendente, une contradiction. □

Définition 3.1.4. — Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. On appelle le *rang* de V le cardinale de toute base de V, noté $\mathrm{rg}(V)$.

Corollaire 3.1.5. — *Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. Tout sous-espace vectoriel de V est nécessairement de type fini.*

Démonstration. — Soit V' un sous-espace vectoriel de V. Si V' n'est pas de type fini, par récurrence on peut construire pour tout entier $n \geqslant 1$ une famille libre $(x_i)_{i=1}^n$ dans V (ici on utilise la forme contraposée du lemme 3.1.1). Cela n'est pas possible dès que $n > \mathrm{rg}(V)$. □

3.2. Espace quotient

Soient V un espace vectoriel sur K et V' un sous-espace vectoriel de V. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur V :

$$\forall\, x, y \in V, \quad x \sim y \text{ si et seulement si } x - y \in V'.$$

On désigne par V/V' l'ensemble quotient $V/\sim$. Si x_1, x_2, y_1, y_2 sont des éléments de V tels que $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2$, alors on a $x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2$. Si $x \sim y$ et si $\lambda \in K$, alors $\lambda x \sim \lambda y$. Donc les lois de composition de V induisent des lois de composition sur V/V' telles que

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{et} \quad \lambda[x] = [\lambda x]$$

quels que soient $x, y \in V$ et $\lambda \in K$. L'élément neutre de V/V' est la classe de tout élément dans V'. Il s'avère que l'espace V/V' muni de ces lois de composition est un espace vectoriel sur K, appelé le *quotient* de V par V'. L'application de projection π de V vers V/V', qui envoie $x \in V$ en sa classe d'équivalence $[x]$, est une application linéaire. Elle est de plus surjective.

Proposition 3.2.1. — *Soient V un espace vectoriel sur K et V' un sous-espace vectoriel de V.*

1) Si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n$ est une famille génératrice dans V, alors $[\boldsymbol{x}] = ([x_i])_{i=1}^n$ est une famille génératrice dans V/V'. Par conséquent, si V est de type fini, il en est de même de V/V'.

2) Supposons que l'espace vectoriel V est de type fini. Soient $(x_i)_{i=1}^m$ une base de V' et $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=m+1}^n$ une base de V/V'. Si, pour tout $i \in \{m+1, \ldots, n\}$, x_i est un représentant de u_i dans V, alors la famille $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n$ est une base de V.

Démonstration. — 1) Soit $\pi : V \to V/V'$ l'application de projection. On a $\Phi_{[\boldsymbol{x}]} = \pi\Phi_{\boldsymbol{x}}$. Si $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ est surjective, alors il en est de même de $\Phi_{\boldsymbol{x}}$ (puisque π est surjective).

2) Montrons que la famille $\boldsymbol{x}$ est libre. Soit $(a_i)_{i=1}^n$ des éléments dans K tels que

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

On a alors

$$\sum_{i=m+1}^n a_i u_i = 0,$$

d'où $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$. Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^m a_i x_i = 0,$$

et donc $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Dans la suite, on démontre que la famille $\boldsymbol{x}$ est génératrice. Soit y un élément de V. Comme $\boldsymbol{u}$ est une base de V/V', il existe des éléments $(b_i)_{i=m+1}^n$ de K tels que

$$[y] = \sum_{i=m+1}^{n} a_i u_i = \Big[\sum_{i=m+1}^{n} b_i x_i\Big].$$

D'où

$$y - \sum_{i=m+1}^{n} b_i x_i \in V'.$$

Comme $(x_i)_{i=1}^m$ est une base de V', il existe des éléments $(b_i)_{i=1}^m$ de K tels que

$$y - \sum_{i=m+1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{m} b_i x_i.$$

Donc

$$y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

□

Corollaire 3.2.2. — *Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. Toute famille libre dans V s'étend en une base de V.*

Démonstration. — Soit $(x_i)_{i=1}^r$ une famille libre de V. Soit V' le sous-espace vectoriel de V engendré par cette famille. Il s'avère que $(x_i)_{i=1}^r$ est une base de V'. Choisissons une base arbitraire de V/V'. Par la proposition 3.2.1 2) on obtient une base de V qui contient la famille $(x_i)_{i=1}^r$. □

Corollaire 3.2.3. — *Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. Pour tout sous-espace vectoriel V' de V, on a*

$$\mathrm{rg}(V) = \mathrm{rg}(V') + \mathrm{rg}(V/V').$$

Soit $\varphi : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur K. On rappelle que le *noyau* de φ est par définition l'ensemble $\mathrm{Ker}(\varphi)$ des $x \in V$ tels que $\varphi(x) = 0$. C'est un sous-espace vectoriel de V. En outre, l'image de φ, notée comme $\mathrm{Im}(\varphi)$, est un sous-espace vectoriel sur W. Le théorème suivant donne un lien entre le noyau et l'image de φ.

Théorème 3.2.4. — *Soit $\varphi : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur K. Il existe une unique application linéaire $\bar{\varphi} : V/\mathrm{Ker}(\varphi) \to W$ telle que $\bar{\varphi}\pi = \varphi$. De plus, $\bar{\varphi}$ donne une bijection entre $V/\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$.*

Démonstration. — Si x et y sont deux éléments de V tels que $x-y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors on a $\varphi(x) = \varphi(y)$. Donc φ induit par passage au quotient une application $\bar{\varphi}$ de $V/\mathrm{Ker}(\varphi)$

vers W telle que $\bar{\varphi}\pi = \varphi$. Cette dernière relation implique aussi l'unicité de $\bar{\varphi}$. En outre, l'application $\bar{\varphi}$ est linéaire car

$$\bar{\varphi}([x]+[y]) = \bar{\varphi}([x+y]) = \varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) = \bar{\varphi}([x]) + \bar{\varphi}([y]),$$
$$\bar{\varphi}(\lambda[x]) = \bar{\varphi}([\lambda x]) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\bar{\varphi}([x])$$

quels que soient $x, y \in V$ et $\lambda \in K$. Montrons que l'application $\bar{\varphi}$ est injective. Si $[x]$ est une classe dans $V/\operatorname{Ker}(\varphi)$ telle que $\bar{\varphi}([x]) = \varphi(x) = 0$, alors on a $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ et donc $[x]$ est la classe neutre. Enfin, tout élément de $\operatorname{Im}(\varphi)$ s'écrit sous la forme $\varphi(x)$ où $x \in V$. On a donc $y = \bar{\varphi}([x]) \in \operatorname{Im}(\bar{\varphi})$. □

3.3. Espace des applications linéaires

Soient V et W deux espaces vectoriels sur K. On désigne par $L(V;W)$ l'ensemble des applications linéaires de V vers W. L'espace $L(V;W)$ est naturellement muni des lois de composition telles que

$$\forall\,\varphi,\psi \in L(V;W),\ x\in V,\quad (\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x),$$
$$\forall\,\lambda\in K,\ \varphi\in L(V;W),\ x\in V,\quad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x).$$

Il s'avère que l'espace $L(V;W)$ muni de ces lois de composition est un espace vectoriel sur K.

Pour tous entiers m et n tels que $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on désigne par $M_{n,m}(K)$ l'espace des matrices de taille $n\times m$ à coefficients dans K. C'est un espace vectoriel sur K qui est canoniquement isomorphe à K^{nm}. Donc son rang est nm.

Soient V et W deux espaces vectoriels de type fini et non-nuls sur K. Soient n et m les rangs de V et W respectivement. Étant données une base $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n$ de V et une base $\boldsymbol{y} = (y_j)_{j=1}^m$ de W, on construit une application linéaire $\Theta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ de $M_{n,m}(K)$ vers $L(V;W)$ qui envoie une matrice $A = (a_{ij})$ en l'application linéaire

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m a_{ij}y_j.$$

L'application $\Theta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$ est une bijection. En effet, si $\varphi : V \to W$ est une application linéaire, alors pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, l'élément $\varphi(x_i)$ s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}(\varphi)y_j.$$

L'application qui associe $(a_{ij}(\varphi))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ à φ est l'inverse de $\Theta_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}$. On en déduit le résultat suivant:

Proposition 3.3.1. — *Soient V et W deux espaces vectoriels de type fini sur K. L'espace vectoriel $L(V;W)$ est de rang* $\operatorname{rg}(V)\operatorname{rg}(W)$.

La matrice $(a_{ij}(\varphi))$ vérifie la propriété suivante:

$$\begin{pmatrix}\varphi(x_1)\\ \varphi(x_2)\\ \vdots\\ \varphi(x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(\varphi) & a_{12}(\varphi) & \cdots & a_{1m}(\varphi)\\ a_{21}(\varphi) & a_{22}(\varphi) & \cdots & a_{2m}(\varphi)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(\varphi) & a_{n2}(\varphi) & \cdots & a_{nm}(\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$$

Définition 3.3.2. — Soit V un espace vectoriel sur K. On appelle forme linéaire sur V toute application linéaire de V vers K. L'espace $L(V;K)$ des applications linéaires de V vers K est aussi noté comme $V^\vee$.

D'après la proposition 3.3.1, si V est de type fini, alors on a $\mathrm{rg}(V^\vee) = \mathrm{rg}(V)$. Si $(x_i)_{i=1}^r$ est une base de V, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on désigne par $x_i^\vee$ la forme linéaire sur V telle que

$$x_i^\vee(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r) = \lambda_i.$$

Il s'avère que $(x_i^\vee)_{i=1}^r$ est une base de $V^\vee$, appelée la *base duale* de $(x_i)_{i=1}^r$.

Proposition 3.3.3. — *Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. L'application Θ de V vers $V^{\vee\vee}$, qui envoie $x \in V$ en $(f \in V^\vee) \mapsto f(x)$, est une bijection.*

Démonstration. — D'abord cette application est linéaire. En outre, si $(e_i)_{i=1}^n$ est une base de V, alors Θ envoie e_i en $e_i^{\vee\vee}$. Donc elle envoie une base de V en une base de $V^{\vee\vee}$, d'où elle est une bijection. □

Soient $(V_i)_{i=1}^n$ une famille d'espaces vectoriels sur K, et W un espace vectoriel sur K, on appelle *application multilinéaire* de $V_1 \times \cdots \times V_n$ vers W toute application $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\varphi(x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \varphi(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n),$$
$$\varphi(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda\varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Il s'avère que les applications multilinéaires de $V_1 \times \cdots \times V_n$ vers W forment un espace vectoriel sur K que l'on note $L(V_1, \cdots, V_n; W)$.

Proposition 3.3.4. — *Soient $(V_i)_{i=1}^n$ et W des espaces vectoriels sur K, où $n \geqslant 2$. L'application linéaire de $L(V_1, \dots, V_n; W)$ vers $L(V_1, L(V_2, \dots, V_n; W))$ qui envoie $\varphi \in L(V_1, \dots, V_n; W)$ en*

$$(x_1 \in V_1) \longmapsto \Big[(x_2, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\Big]$$

est une bijection. En particulier, si les espaces vectoriels $(V_i)_{i=1}^n$ et W sont de type fini, alors

$$\mathrm{rg}\, L(V_1, \dots, V_n; W) = \mathrm{rg}(V_1) \cdots \mathrm{rg}(V_n)\, \mathrm{rg}(W). \tag{3.1}$$

Démonstration. — Il suffit de construire l'inverse de l'application dans l'énoncé de la proposition: elle envoie $f \in L(V_1, L(V_2, \ldots, V_n; W))$ en

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1)(x_2, \ldots, x_n).$$

Enfin (3.1) se déduit de la proposition 3.3.1 par récurrence sur n. □

On désigne par $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ vers $\{1, \ldots, n\}$. La composition d'applications définit une loi de composition sur $\mathfrak{S}_n$ de sorte que $\mathfrak{S}_n$ devient un groupe.

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on désigne par $\operatorname{sgn}(\sigma)$ le nombre

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Proposition 3.3.5. — *L'application $\sigma : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$ est multiplicative. De plus, elle prend valeur dans $\{\pm 1\}$.*

Démonstration. — On désigne par $\mathcal{A}$ la famille des parties de cardinale 2 de $\{1, \ldots, n\}$. Par définition, on a

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{A}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

En outre, tout élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ induit une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ qui envoie $\{i, j\}$ en $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$. Cette application est injective car si

$$\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{\sigma(k), \sigma(\ell)\}$$

alors le cardinale de $\{i, j\} \cup \{k, \ell\}$ est égal à 2, et donc $\{i, j\} = \{k, \ell\}$. Comme l'ensemble $\mathcal{A}$ est fini, on obtient que cette application est une bijection. Par conséquent, pour tous les $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\tau\sigma) &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{A}} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{i - j} \\ &= \Big(\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{A}} \frac{\tau(\sigma(i)) - \tau(\sigma(j))}{\sigma(i) - \sigma(j)} \Big) \Big(\prod_{\{i,j\} \in \mathcal{A}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \Big) = \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\sigma)\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{S}_n$ est un groupe fini, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que σ^m s'identifie à l'application d'identité de $\{1, \ldots, n\}$[1]. Par définition, la signature de l'application d'identité est 1. Donc $\operatorname{sgn}(\sigma)^m = 1$, d'où $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ car elle est réelle. □

[1] La démonstration est laissée comme un exercice.

Définition 3.3.6. — Soit V un espace vectoriel sur K. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On appelle *forme multilinéaire* de degré n sur V tout élément dans

$$(V^{\otimes n})^\vee := L(\underbrace{V, \ldots, V}_{n \text{ copies}}; K).$$

On appelle *forme alternée* de degré n sur V tout élément de $(V^{\otimes n})^\vee$ qui vérifie la propriété suivante:

$$\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

Les formes alternées forment un sous-espace de $(V^{\otimes n})^\vee$ que l'on note $(\Lambda^n V)^\vee$.

Si $f \in (V^{\otimes n})^\vee$ et $g \in (V^{\otimes m})^\vee$ sont deux formes multilinéaires, on désigne par $f \otimes g$ l'application de V^{n+m} vers K qui envoie $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ en

$$f(x_1, \ldots, x_n)g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

C'est une forme multilinéaire de degré $n+m$ sur V. On obtient ansi une application

$$\begin{array}{ccc} (V^{\otimes n})^\vee \times (V^{\otimes m})^\vee & \longrightarrow & (V^{\otimes (n+m)})^\vee, \\ (f, g) & \longmapsto & f \otimes g. \end{array}$$

Cette application est bilinéaire. Plus généalement, si $(n_i)_{i=1}^r$ est une famille d'entiers strictement positifs, et si, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, f_i est un élément dans $(V^{\otimes n_i})^\vee$, on désigne par $f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$ l'élément de $(V^{\otimes (n_1 + \cdots + n_r)})^\vee$ qui envoie $(x_1, \ldots, x_{n_1 + \cdots + n_r})$ en

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}) f_2(x_{n_1+1}, \ldots, x_{n_1+n_2}) \cdots f_r(x_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}, \ldots, x_{n_1+\cdots+n_r}).$$

L'élément $f_1 \otimes \cdots \otimes f_r$ est appelé le *produit tensoriel* des $(f_i)_{i=1}^r$. L'application

$$\begin{array}{ccc} (V^{\otimes n_1})^\vee \times \cdots \times (V^{\otimes n_r})^\vee & \longrightarrow & (V^{\otimes (n_1+\cdots+n_r)})^\vee, \\ (f_1, \ldots, f_r) & \longmapsto & f_1 \otimes \cdots \otimes f_r \end{array}$$

est multilinéaire. De plus, le produit tensoriel est associatif: si n, m et k sont trois entiers strictement positifs, on a

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

quels que soient $f \in (V^{\otimes n})^\vee$, $g \in (V^{\otimes m})^\vee$ et $h \in (V^{\otimes k})^\vee$.

Théorème 3.3.7. — *Soient V un espace vectoriel de type fini, $r = \mathrm{rg}(V)$ et $(x_i)_{i=1}^r$ une base de V. Pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille $(x_{i_1}^\vee \otimes \cdots \otimes x_{i_n}^\vee)_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r}$ est une base de $(V^{\otimes n})^\vee$.*

Démonstration. — Montrons que la famille est libre. Soient $(\lambda_{i_1, \ldots, i_n})_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r}$ une famille d'éléments de K tels que

$$f = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1}^\vee \otimes \cdots \otimes x_{i_n}^\vee = 0.$$

Comme pour tout $(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,r\}^n$ on a
$$f(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})=\lambda_{i_1,\ldots,i_n},$$
on obtient donc $\lambda_{i_1,\ldots,i_n}=0$ quel que soit $(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,r\}^n$.

On a vu plus haut que le rang de $(V^{\otimes n})^\vee$ est r^n. Comme le cardinale de la famille $(x_{i_1}^\vee\otimes\cdots\otimes x_{i_n}^\vee)_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant r}$ est exactement r^n, cette famille est une base de $(V^{\otimes n})^\vee$. □

Si f est une forme multilinéaire de degré n sur V. On désigne par $\pi_n(f)\in(V^{\otimes n})^\vee$ la forme telle que
$$\pi(f)(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$
Ainsi on a déifni une application linéaire de $(V^{\otimes n})^\vee$ dans lui-même.

Proposition 3.3.8. — *Soient V un espace vectoriel sur K et $n\geqslant 1$ un entier. L'application $\pi_n:(V^{\otimes n})^\vee\to(V^{\otimes n})^\vee$ définie comme ci-dessus est une projection de $(V^{\otimes n})^\vee$ dans $(\Lambda^nV)^\vee$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que l'image de π_n est contenue dans $(\Lambda^nV)^\vee$. Soit τ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On a
$$\begin{aligned}\pi_n(f)(x_{\tau(1)},\ldots,x_{\tau(n)})&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f(x_{\tau(\sigma(1))},\ldots,x_{\tau(\sigma(n))})\\&=\operatorname{sgn}(\tau)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\tau\sigma)f(x_{\tau(\sigma(1))},\ldots,x_{\tau(\sigma(n))})\\&=\operatorname{sgn}(\tau)\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\\&=\operatorname{sgn}(\tau)\pi_n(f)(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}\tag{3.2}$$
Donc $\pi_n(f)\in\Lambda^nV^\vee$.

En outre, si f est une forme alternée de degré n, alors
$$\begin{aligned}\pi_n(f)(x_1,\ldots,x_n)&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\\&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)^2f(x_1,\ldots,x_n)\\&=f(x_1,\ldots,x_n).\end{aligned}$$
Donc la restrictioin de π_n à $(\Lambda^nV)^\vee$ est l'application d'identité. □

Si $\alpha\in(\Lambda^nV)^\vee$ et $\beta\in(\Lambda^mV)^\vee$ sont deux formes alternées sur V, on désigne par $\alpha\wedge\beta$ la forme $\pi_{n+m}(\alpha\otimes\beta)\in(\Lambda^{n+m}V)^\vee$, appelée le *produit extérieur* de α et β. Par définition, le produit extérieur est une application bilináire de $(\Lambda^nV)^\vee\times(\Lambda^mV)^\vee$ dans $(\Lambda^{n+m}V)^\vee$.

Proposition 3.3.9. — *Soit V un espace vectoriel sur K.*

1) Le produit extérieur est associatif: pour tout les entiers strictement positifs n, m et k, on a

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$$

quels que soient $\alpha\in(\Lambda^nV)^\vee$, $\beta\in(\Lambda^mV)^\vee$ et $\gamma\in(\Lambda^kV)^\vee$.

2) Si $\alpha\in(\Lambda^nV)^\vee$, $\beta\in(\Lambda^mV)^\vee$, où n et m sont deux entiers strictement positifs, alors on a

$$\beta\wedge\alpha=(-1)^{nm}\alpha\wedge\beta.$$

3) Si f est un élément de $V^\vee$, alors $f\wedge f=0$.

Démonstration. — 1) Montrons la formule suivante:

$$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\pi_{n+m+k}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma). \tag{3.3}$$

Pour tout $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_{n+m+k})\in K^{n+m+k}$, et tout $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m+k}$, on désigne par $\sigma(\boldsymbol{x})$ l'élément $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n+m+k)})$ dans K^{n+m+k}. En outre, on désigne par

$$T:\mathfrak{S}_{n+m}\to\mathfrak{S}_{n+m+k}$$

l'application qui envoie $\tau\in\mathfrak{S}_{n+m}$ en

$$T(\tau)(i)=\begin{cases}\tau(i), & i\in\{1,\ldots,n+m\},\\ i, & i\in\{n+m+1,\ldots,n+m+k\}.\end{cases}$$

C'est un morphisme de groupes qui est commutatif. Par définition, on a $\operatorname{sgn}(\tau)=\operatorname{sgn}(T(\tau))$. On a, pour tout $\boldsymbol{x}\in K^{n+m+k}$,

$$\begin{aligned}
&((\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma)(\boldsymbol{x})\\
&=\frac{1}{(n+m+k)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m+k}}\operatorname{sgn}(\sigma)\big((\alpha\wedge\beta)\otimes\gamma\big)(\sigma(\boldsymbol{x}))\\
&=\frac{1}{(n+m+k)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m+k}}\operatorname{sgn}(\sigma)\frac{1}{(n+m)!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{n+m}}\operatorname{sgn}(\tau)(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(T(\tau)\sigma(\boldsymbol{x}))\\
&=\frac{1}{(n+m)!}\sum_{\sigma'\in T(\mathfrak{S}_{n+m})}\frac{1}{(n+m+k)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m+k}}\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma)(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(\sigma'\sigma(\boldsymbol{x}))\\
&=\frac{1}{(n+m)!}\sum_{\sigma'\in T(\mathfrak{S}_{n+m})}\pi_{n+m+k}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(\boldsymbol{x})=\pi_{n+m+k}(\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

La démonstration de la seconde inéqualité de (3.3) est très similaire. On l'a laisse comme un exercice.

2) Pour $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_{n+m})\in K^{n+m}$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m}$, on désigne par $\sigma(\boldsymbol{x})$ le point $(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n+m)})$. Soit $\iota\in\mathfrak{S}_{n+m}$ l'application qui envoie $(1,\ldots,n,n{+}1,\ldots,n{+}m)$ en $(n+1,\ldots,n+m,1,\ldots,n)$. Par définition, on a $\operatorname{sgn}(\iota)=(-1)^{nm}$. En outre,

$$(\beta\otimes\alpha)(\iota(\boldsymbol{x}))=(\alpha\otimes\beta)(\boldsymbol{x}).$$

On a

$$\begin{aligned}(\beta\wedge\alpha)(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{(n+m)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m}}\operatorname{sgn}(\sigma)(\beta\otimes\alpha)(\sigma(\boldsymbol{x}))\\ &= \frac{1}{(n+m)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m}}(-1)^{nm}\operatorname{sgn}(\iota\sigma)(\beta\otimes\alpha)(\iota\sigma(\boldsymbol{x}))\\ &= (-1)^{nm}\frac{1}{(n+m)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+m}}\operatorname{sgn}(\sigma)(\beta\otimes\alpha)(\sigma(\boldsymbol{x}))\\ &= (-1)^{nm}\alpha\wedge\beta.\end{aligned}$$

3) On a $f\wedge f=(-1)^{1\times 1}f\wedge f$, d'où $f\wedge f=0$. □

3.4. Déterminant

Le déterminant est un outil important à étudier l'indépendence des vecteurs dans un espace vectoriel.

Lemme 3.4.1. — *Soient V un espace vectoriel sur K et $(f_i)_{i=1}^n$ une famille de formes linéaires sur V. La famille $(f_i)_{i=1}^n$ est dépendente dans l'espace dual $V^\vee$ si et seulement si*

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n=0.$$

Démonstration. — "$\Longrightarrow$": Sans perte de généralité, on peut supposer que f_n s'écrit comme une combinaison linéaire des $(f_i)_{i=1}^{n-1}$, soit

$$f_n=\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_{n-1}f_{n-1}.$$

Par la multilinéarité, on a (d'après la proposition 3.3.9)

$$f_1\wedge\cdots\wedge f_n=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i f_1\wedge\cdots\wedge f_{n-1}\wedge f_i=0.$$

"$\Longleftarrow$": Soient

$$V_0=\bigcap_{i=1}^n\operatorname{Ker}(f_i)$$

et $V'=V/V_0$. Par passage au quotient, les formes linéaires $(f_i)_{i=1}^n$ induisent une application injective

$$\bar f=(\bar f_i)_{i=1}^n : V'\longrightarrow K^n.$$

Donc V' est un espace vectoriel de type fini. La famille $(f_i)_{i=1}^n$ est libre si et seulement si $(\bar f_i)_{i=1}^n$ l'est. En outre, pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in V^n$, on a

$$(f_1\wedge\cdots\wedge f_n)(x_1,\ldots,x_n)=(\bar f_1\wedge\cdots\wedge\bar f_n)([x_1],\ldots,[x_n]).$$

On est donc ramené au cas où l'espace vectoriel V est de type fini, que l'on supposera dans la suite. Montrons que, si la famille $(f_i)_{i=1}^n$ est libre, alors $f_1\wedge\cdots\wedge f_n\neq 0$. D'après le corollaire 3.2.2, la famille $(f_i)_{i=1}^n$ s'étend en une base $(f_i)_{i=1}^{n+m}$ de $V^\vee$, qui induit une base duale $(f_i^\vee)_{i=1}^{n+m}$ de $V^{\vee\vee}$. Par l'isomorphisme $V \to V^{\vee\vee}$, la base duale $(f_i^\vee)_{i=1}^{n+m}$ correspond à une base $(x_i)_{i=1}^{n+m}$ de V. Par définition on a[(2)]

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n+m).$$

Un calcul direct montre alors que

$$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(x_1, \cdots, x_n) = 1,$$

d'où $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ est non-nul. □

Théorème 3.4.2. — *Soient V un espace vectoriel de rang r sur K et $(x_i)_{i=1}^r$ une base de V. Pour tout $n \in \{1, \ldots, r\}$, la famille*

$$x_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge x_{i_n}^\vee, \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqslant r \tag{3.4}$$

est une base de $(\Lambda^n V)^\vee$. En particulier, le rang de $(\Lambda^n V)^\vee$ est $\binom{r}{n}$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.3.9, pour tout élément $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, r\}^n$, on a

$$x_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge x_{i_n}^\vee = 0$$

si l'ensemble $\{i_1, \ldots, i_n\}$ est de cardinale $< n$ (lorsque il y a des répétitions); et on a

$$x_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge x_{i_n}^\vee = (\pm 1) x_{j_1}^\vee \wedge \cdots \wedge x_{j_n}^\vee$$

si les indices $i_1, \ldots, i_n$ sont distincts, où $(j_1, \ldots, j_n)$ est la permutation de $(i_1, \ldots, i_n)$ à l'ordre croissant. On obtient anisi que la famille (3.4) est génératrice, compte tenu du théorème 3.3.7.

Enfin, si $(\lambda_{i_1,\ldots,i_n})_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant r}$ est une famille d'éléments de K et si

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant r} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge x_{i_n}^\vee,$$

alors pour tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, r\}^n$ tel que $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n = r$, on a

$$\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \lambda_{i_1,\ldots,i_n}.$$

D'où $\alpha = 0$ implique que tous les coefficients $\lambda_{i_1,\ldots,i_n}$ sont nuls. La famille (3.4) est donc libre. □

Définition 3.4.3. — Soit $\varphi : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur K. Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $\alpha \in (\Lambda^n W)^\vee$, on désigne par $(\Lambda^n \varphi)^\vee(\alpha)$ la forme multilinéaire de degré n sur V qui envoie $(x_1, \ldots, x_n) \in V^n$ en

$$\alpha(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)).$$

---

(2) Ici on utilise l'expression de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

C'est une forme alternée de degré n sur V. L'application $(\Lambda^n\varphi)^\vee : (\Lambda^n W)^\vee \to (\Lambda^n V)^\vee$ est linéaire.

Remarque 3.4.4. — L'application linéaire $\varphi : V \to W$ induit une application linéaire $\varphi^\vee : W^\vee \to V^\vee$ qui envoie $f \in W^\vee$ en $(x \mapsto f(\varphi(x)))$. Cette application s'identifie à $(\Lambda^1\varphi)^\vee$. Par définiton, si $(\alpha_i)_{i=1}^n$ est une famille de forme linéaire sur W, alors on a

$$(\Lambda^n\varphi)^\vee(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = \varphi^\vee(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^\vee(\alpha_n).$$

Proposition 3.4.5. — *Soit $\varphi : V \to W$ une application linéaire d'espaces vectoriels sur K. Si φ est surjective, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, l'application $(\Lambda^n\varphi)^\vee$: $(\Lambda^n W)^\vee \to (\Lambda^n V)^\vee$ est injective.*

Démonstration. — Soit α une forme dans $(\Lambda^n W)^\vee$ telle que $(\Lambda^n\varphi)^\vee(\alpha) = 0$. Par définition, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in V^n$, on a

$$\alpha(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = 0.$$

Comme l'application f est surjective, on obtient que, pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in W^n$, on a $\alpha(y_1, \ldots, y_n) = 0$, d'où $\alpha = 0$. □

Définition 3.4.6. — Soit V un espace vectoriel de type fini sur K. Soit r le rang de V. Pour tout application linéaire $\varphi : V \to V$, on désigne par $\mathrm{dét}(\varphi)$ l'application $(\Lambda^r\varphi)^\vee : (\Lambda^r V)^\vee \to (\Lambda^r V)^\vee$, considérée comme un élément dans K en identifiant $L((\Lambda^r V)^\vee, (\Lambda^r V)^\vee)$ à K via la base qui consiste de l'application d'identité de $(\Lambda^r V)^\vee$ vers lui-même.

D'après la remarque 3.4.4, si $(x_i)_{i=1}^r$ est une base de V et si $(x_i^\vee)_{i=1}^r$ est la base duale, alors on a la relation

$$\varphi^\vee(x_1^\vee) \wedge \cdots \wedge \varphi^\vee(x_r^\vee) = \mathrm{dét}(\varphi)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r). \tag{3.5}$$

Cette formule est très utile dans le calcule du déterminant d'un endomorphisme(3).

Proposition 3.4.7. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et $\varphi : V \to V$ une application linéaire. On a*

$$\mathrm{dét}(\varphi) = \mathrm{dét}(\varphi^\vee).$$

Démonstration. — Soient $(x_i)_{i=1}^r$ une base de V et $(f_i)_{i=1}^r$ son base duale. On identifie V à $V^{\vee\vee}$ via l'application linéaire de bidualité (voir la proposition 3.3.3). Par définition, on a

$$\varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n) = \mathrm{dét}(\varphi^\vee)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n).$$

(3) C'est-à-dire une application linéaire d'un espace vectoriel vers lui-même.

Comme

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n)(f_1, \ldots, f_n) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \varphi(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(x_n)(f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(n)}) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \varphi^\vee(f_{\sigma(1)})(x_1) \cdots \varphi^\vee(f_{\sigma(n)})(x_n) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \varphi^\vee(f_1)(x_{\tau(1)}) \cdots \varphi^\vee(f_n)(x_{\tau(n)}) \\
&= (\Lambda^n \varphi)^\vee (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \operatorname{dét}(\varphi)(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

et comme

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)(f_1, \ldots, f_n) = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

on obtient $\operatorname{dét}(\varphi) = \operatorname{dét}(\varphi^\vee)$. □

Théorème 3.4.8. — *Soit V un espace vectoriel de type fini sur K et $\varphi : V \to V$ une application linéaire. Alors φ est une bijection si et seulement si* $\operatorname{dét}(\varphi)$ *est non-nul.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.4.5, on obtient que, si φ est surjective, alors $\operatorname{dét}(\varphi) \neq 0$.

Supposons que $\operatorname{dét}(\varphi) = 0$. Soit $(x_i)_{i=1}^r$ une base de V et $(x_i^\vee)_{i=1}^r$ sa base duale. On a alors

$$\varphi^\vee(x_1^\vee) \wedge \cdots \wedge \varphi^\vee(x_r^\vee) = 0,$$

d'où $(\varphi^\vee(x_i^\vee))_{i=1}^r$ est une famille dépendente (voir le lemme 3.4.1). Donc $\varphi^\vee$ n'est pas une bijection, et φ ne l'est pas non-plus. □

Théorème 3.4.9. — *Soient V un espace vectoriel de type fini et $\varphi, \psi : V \to V$ deux applications linéaires. On a*

$$\operatorname{dét}(\psi\varphi) = \operatorname{dét}(\psi)\operatorname{dét}(\varphi).$$

Démonstration. — L'égalité est triviale lorsque l'une des applications linéaires φ et ψ n'est pas une bijection: les deux côtés sont nuls. Dans la suite, on suppose que les applications φ et ψ sont des bijections. Soit $(x_i)_{i=1}^r$ une base de V. La famille $(\varphi(x_i))_{i=1}^r$ est également une base de V. On a

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dét}(\psi\varphi)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) = \psi(\varphi(x_1)) \wedge \cdots \wedge \psi(\varphi(x_n)) \\
&= \operatorname{dét}(\psi)(\varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n)) = \operatorname{dét}(\psi)\operatorname{dét}(\varphi)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n).
\end{aligned}$$

□

Soient $n \geqslant 1$ un entier et $A = (a_{ij})$ une matrice dans $M_{n,n}(K)$. On peut la considère comme une application linéaire $\varphi_A : K^n \to K^n$ qui envoie $e_i \in K^n$ en

$$a_{i1}e_1 + \cdots + a_{in}e_n.$$

Le déterminant de la matrice A est défini comme le déterminant de l'application linéaire φ_A, noté $\text{dét}(A)$.

Exercice 3.4.10. — Soient $n \geqslant 1$ un entier et $A = (a_{ij})$ une matrice dans $M_{n,n}(K)$. Montrer que la matrice de l'application linéaire $\varphi_A^\vee : (K^n)^\vee \to (K^n)^\vee$ par rapport à la base duale $(e_i^\vee)_{i=1}^n$ est la transposée de A. En déduire que $\text{dét}(A) = \text{dét}(A^T)$.

Théorème 3.4.11. — *Soient $n \geqslant 1$ un entier et $A = (a_{ij})$ une matrice dans $M_{n,n}(K)$. On a*

$$\text{dét}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Démonstration. — Par définition, on a (en identifiant K^n au dual de $(K^n)^\vee$)

$$\varphi_A(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_A(e_n) = \text{dét}(A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n).$$

Par la multilinéarité du produit extérieur, on obtient

$$\varphi_A(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi_A(e_n) = \sum_{1 \leqslant j_1, \cdots, j_n \leqslant n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}.$$

Si $(j_1, \ldots, j_n) = (\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} = \text{sgn}(\sigma) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$; sinon $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} = 0$. On obtient donc le résultat. □

Corollaire 3.4.12. — *Soient $n \geqslant 1$ un entier et $A = (a_{ij})$ une matrice dans $M_{n,n}(K)$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on désigne par A_{ij} la matrice dans $M_{(n-1),(n-1)}(K)$ obtenue de A en supprimant sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a*

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \text{dét}(A_{ij}).$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned}\text{dét}(A)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) &= \sum_{1 \leqslant j_1, \cdots, j_n \leqslant n} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_n} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{dét}(A_{ij})(-1)^i e_j \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j-1} \wedge e_{j+1} \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \text{dét}(A_{ij}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré. □

Définition 3.4.13. — Soient V un espace vectoriel sur K, et $(V_i)_{i=1}^n$ une famille de sous-espaces vectoriels de V. On dit que V est la somme directe des V_i si tout élément $x \in V$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in V_i$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Remarque 3.4.14. — Soient V un espace vectoriel sur K, et $(V_i)_{i=1}^n$ une famille de sous-espaces vectoriels de V. Pour que V soit la somme directe des V_i, il faut et il suffit que $V = V_1 + \cdots + V_n$ et que, pour toute famille $(x_i)_{i=1}^n$ d'éléments de V tels que $x_i \in V_i$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, la relation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ entraîne $x_1 = \cdots = x_n = 0$. En outre, si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\boldsymbol{x}^{(i)}$ est une base de V_i, alors la réunion $\bigcup_{i=1}^n \boldsymbol{x}^{(i)}$ est une base de V.

Proposition 3.4.15. — *Soient V un espace vectoriel sur K et $(V_i)_{i=1}^n$ une famille de sous-espaces vectoriels de V tels que V soit la somme directe des V_i. Soit $\varphi : V \to V$ une application linéaire telle que chaque sous-espace V_i est invariant par φ. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on désigne par φ_i la restriction de φ à V_i, considérée comme une application linéaire de V_i vers lui-même. Alors on a*

$$\mathrm{d\acute{e}t}(\varphi) = \prod_{i=1}^n \mathrm{d\acute{e}t}(\varphi_i).$$

3.5. Valeurs et vecteurs propres

Soit V un espace vectoriel sur K. On appelle *endomorphisme* de V toute application linéaire de V dans V. Il s'avère que l'ensemble des endomorphismes de V forme un espace vectoriel sur V, noté $\mathrm{End}(V)$.

Si φ et ψ sont deux endormorphisme de V, alors il en est de même de la composition $\varphi\psi$.

Définition 3.5.1. — On appelle *anneau* tout ensemble A muni de deux lois de compositions $(a, b) \mapsto a + b$ (appelée la loi d'addition) et $(a, b) \mapsto ab$ (appelée la loi de multiplication) qui vérifie les conditions suivantes:

1) l'ensemble A muni de la lois d'addition est un groupe commutatif (dont l'élément neutre est noté 0),
2) l'ensemble A muni de la lois de multiplication est un monoïde[4] (dont l'élément unité est noté 1),
3) $0 \neq 1$,
4) pour tous $a, b, c \in A$, on a

$$(a + b)c = ac + bc, \quad c(a + b) = ca + cb.$$

---

[4] Autrement dit, la loi de multiplication est associative, et il existe $1 \in A$ tel que $1a = a1 = a$ quel que soit $a \in A$.

Si de plus la loi de multiplication est commutative, on dit que l'anneau A est commutatif.

Soient A et B deux anneaux. On appelle *homomorphisme* de A vers B toute application $f : A \to B$ telle que

$$\forall\, a, b \in A, \quad f(a+b) = f(a) + f(b),\ f(ab) = f(a)f(b)$$
$$f(1) = 1.$$

Exemple 3.5.2. — $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs. De plus, tout élément non-nul dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est inversible pour la loi de multiplication (un anneau commutatif vérifiant cette propreté est appelé un corps).

Soit V un espace vectoriel sur K. L'ensemble $\mathrm{End}(V)$ muni de l'addition et de la composition (d'applications) forme un anneau (non-nécessairement commutatif!). L'élément neutre $\mathrm{End}(V)$ est l'endomorphisme nul, l'élément unité est l'application d'identité Id_V. L'application de K vers $\mathrm{End}(V)$ qui envoie $\lambda \in K$ vers $\lambda\,\mathrm{Id}_V$ est un homomorphisme d'anneaux.

Soient V un espace vectoriel sur K et φ un endomorphisme de V. Soit λ un élément de K. Si x est un élément non-nul de V tel que $\varphi(x) = \lambda x$, on dit que λ est une *valeur propre* de φ et x est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ.

On désigne par $E_\lambda(\varphi)$ le noyau de l'application linéaire $\lambda\,\mathrm{Id}_V - \varphi$. Par définition, $E_\lambda(\varphi)$ est non-nul si et seulement si λ est une valeur propre de φ.

Proposition 3.5.3. — *Soient V un espace vectoriel sur K et φ un endomorphisme de V. Si $(\lambda_i)_{i=1}^n$ est une famille d'éléments distincts de K et si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, x_i est un élément de $E_{\lambda_i}(\varphi)$ tel que*

$$x_1 + \cdots + x_n = \mathbf{0},$$

alors on a $x_1 = \cdots = x_n = \mathbf{0}$.

Démonstration. — Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Par défintion, on a

$$\begin{aligned}&(\lambda_1 \mathrm{Id}_V - \varphi) \cdots (\lambda_{i-1} \mathrm{Id}_V - \varphi)(\lambda_{i+1} \mathrm{Id}_V - \varphi) \cdots (\lambda_n \mathrm{Id}_V - \varphi)(x_1 + \cdots + x_n)\\ &= (\lambda_1 - \lambda_i) \cdots (\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \cdots (\lambda_n - \lambda_i) x_i = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Comme les $(\lambda_j)_{j=1}^n$ sont distincts, on obtient $x_i = \mathbf{0}$. □

Corollaire 3.5.4. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. On a*

$$\sum_\lambda \mathrm{rg}(E_\lambda(\varphi)) \leqslant \mathrm{rg}(V). \tag{3.6}$$

Démonstration. — Pour tout $\lambda \in K$, soit B_λ une base de $E_\lambda(\varphi)$. D'après la proposition 3.5.3, si $(\lambda_i)_{i=1}^n$ est une famille d'éléments distincts dans K, alors

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_{\lambda_i}$$

est une famille libre dans V. Donc il n'existe qu'un nombre fini de $\lambda \in K$ tels que $E_\lambda(\varphi) \neq \{\mathbf{0}\}$. L'ensemble

$$\bigcup_{\lambda \in K} B_\lambda$$

est alors de cardinale fini et est une famille libre dans V. D'où (3.6). □

Définition 3.5.5. — Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. On dit que φ est *diagonalisable* si

$$\sum_{\lambda \in K} \mathrm{rg}(E_\lambda(\varphi)) = \mathrm{rg}(V),$$

ou de façon équivalente,

$$\sum_{\lambda \in K} E_\lambda(\varphi) = V,$$

ou encore, V admet une base qui consiste de vecteurs propres de φ.

Théorème 3.5.6. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. Si φ est diagonalisable, alors*

$$\mathrm{dét}(\varphi) = \prod_{\substack{\lambda \in K \\ \mathrm{rg}(E_\lambda(\varphi))>0}} \lambda^{\mathrm{rg}(E_\lambda(\varphi))}$$

3.6. Polynôme minimal, polynôme caractéristique

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un sous-ensemble I de A est un *idéal* s'il vérifie les conditions suivantes:

1) I est un sous-groupe de A par rapport à la loi d'addition,
2) pour tout $a \in A$ et tout $b \in I$, on a $ab \in I$.

Exemple 3.6.1. — Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, où l'anneau A est supposé être commutatif. Alors le noyau de f, défini comme $\mathrm{Ker}(f) := \{a \in A \,|\, f(a) = 0\}$, est un idéal de A.

On désigne par $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K. On rappelle que $K[X]$ s'identifie à l'ensembles des suites dans K qui ne contiennent qu'un nombre fini de termes non-nuls. La loi de multiplication est le produit de Cauchy introduit dans §1.5. Un élément $P = (a_i)_{i\geqslant 0}$ de $K[X]$ tel que $a_i = 0$ quel que soit $i \geqslant n$ est noté formellement comme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X_n.$$

Soient F et P deux polynômes. On dit que F est *divisible* par P, ou que P *divise* F, s'il existe un polynôme Q tel que $F = PQ$. Soit $P = (a_i)_{i \geqslant 0}$ un polynôme à coefficients dans K. On appelle *degré* de P le plus petit indice i tel que $a_i \neq 0$. Le degré de P est noté comme $\deg(P)$. Si tous les a_i sont nuls, alors le degré de P est défini par convention comme $-\infty$. On dit qu'un polynôme de degré n

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

est *unitaire* si $a_n = 1$.

Théorème 3.6.2. — *Soit P un polynôme de degré d dans $K[X]$, où $d \geqslant 1$ est un entier. Pour tout polynôme $F \in K[X]$, il existe $Q, R \in K[X]$ avec $\deg(R) < d$ tels que $F = PQ + R$. De plus, les polynôme Q et R sont unique.*

Démonstration. — D'abord la fonction de degré admet les propriétés suivante:

on a $\deg(GH) = \deg(G) + \deg(H)$ *et* $\deg(G+H) \leqslant \max(\deg(G), \deg(H))$ *quels que soient* $G, H \in K[X]$.

Par conséquent, si $F = PQ_1 + R_1 = PQ_2 + R_2$, alors on a $R_1 - R_2 = P(Q_2 - Q_1)$. D'où

$$d + \deg(Q_2 - Q_1) = \deg(R_1 - R_2) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < d$$

et donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$. La partie d'unicité du theéorème est donc vérifiée. On démontre le théorème (la partie d'existence) par récurrence sur le degré n de F. Le cas où $n < d$ est trivial: il suffit de prendre $Q = 0$ et $R = F$. Supposons que le théorème est vérifié par le cas où $\deg(F) < n$. Montrons le cas où F est de la forme

$$F(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n,$$

où $n \geqslant d$ et $a_n \neq 0$. Supposons

$$P(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_d X^d,$$

où $b_d \neq 0$. Le polynôme $F_1(X) := F(X) - a_n/b_d X^{n-d} P(X)$ est de degré $< n$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe des polynômes Q_1 et R tels que $\deg(R) < d$ et que $F_1 = PQ_1 + R$. Soit $Q(X) = Q_1(X) + a_n/b_d X^{n-d}$. On a alors $F = PQ + R$, d'où le théorème. □

Corollaire 3.6.3. — *Tout idéal de $K[X]$ est principal. Plus précisément, tout idéal non-nul I de $K[X]$ est de la forme $\{QP \mid Q \in K[X]\}$, où P est un polynôme unitaire.*

Démonstration. — Soit I un idéal non-nul de $K[X]$. Soit P un polyôme non-nul dans I dont le degré d est le plus petit. Quitte à multiplier P par un scalaire, on peut supposer que P est unitaire. Montrons que tout polynôme dans I s'écrit comme le produit de P avec un autre polynôme. Soit F un polynôme quelconque dans I. D'après le théorème précédent, il existe deux éléments Q et R dans $K[X]$ tels que $F = PQ + R$ et que $\deg(R) < d$. Comme I est un idéal, on a $R \in I$. Cela montre que $R = 0$. Donc $F = QP$. Enfin, comme I est un idéal qui contient P, il contient alors tout élément de $K[X]$ de la forme QP, où $Q \in K[X]$. Par conséquent, $I = \{QP \mid Q \in K[X]\}$. □

Remarque 3.6.4. — Soit I un idéal non-nul de $K[X]$. D'après le corollaire précédent, il existe un unique polynôme unitaire P tel que $I = \{QP \mid Q \in K[X]\}$. En effet, si P_1 et P_2 sont deux tels polynômes P_1 et P_2, alors il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $P_2 = Q_2P_1$ et $P_1 = Q_1P_2$. On obtient alors $P_2 = Q_2Q_1P_2$, d'où $Q_2Q_1 = 1$ et donc $Q_1 = Q_2 = 1$. Si I est de la forme $\{QP \mid Q \in K[X]\}$ avec P unitaire, on dit que I est *engendré* par P, noté $I = (P)$.

Définition 3.6.5. — On dit qu'un polynôme unitaire P est *irréductible* s'il n'existe aucun polynôme unitaire Q de degré > 0 tel que $(Q) \supsetneq (P)$.

Théorème 3.6.6. — *Tout polynôme unitaire se décompose comme un produit de polynômes unitaires irréductibles. En outre, si on écrit un polynôme unitaire F sous la forme*

$$F = \prod_P P^{v_P(F)}, \tag{3.7}$$

où P parcourt tous les polynôme irréductible de degré $\geqslant 1$, alors les exposants $v_P(F)$ sont unique.

Démonstration. — Montrons d'abord l'existence. Soit F un polynôme unitaire. Si F est de degré 0, alors $F(X) = 1$, qui est irréductible. Supposons que le théorème est vérifié pour les polynômes unitaires de degré $< n$. Soit F un polynôme unitaire de degré n. Si F n'est pas irréductible, alors il existe F_1 unitaire de degré $\geqslant 1$ tel que $(F_1) \supsetneq (F)$, d'où il existe $F_2 \in K[X]$ tel que $F = F_1F_2$ (puisque $F \in (F_1)$). De plus, on a $\deg(F_2) \geqslant 1$. Donc tous les deux polynômes F_1 et F_2 sont de degré $< d$. Par l'hypothèse de récurrence, on obtient que F s'écrit comme un produit de polynômes unitaires irréductibles.

Enfin, l'unicité de l'écriture (3.7) se démontre facilement par récurrence sur le degré de F, que l'on laisse comme un exercice. □

On voit aussitôt du théorème précédent que, si F et G sont deux polynômes unitaires, alors F divise G si et seulement si $v_P(F) \leqslant v_P(G)$ quel que soit polynôme irréductible P.

Soit $(F_i)_{i=1}^n$ une famille de polynômes unitaires. On appelle le ppcm de $(F_i)_{i=1}^n$ le polynôme

$$\mathrm{ppcm}(F_1, \ldots, F_n) := \prod_P P^{\max(v_P(F_1), \ldots v_P(F_n))}.$$

On observe que $\mathrm{ppcm}(F_1, \ldots, F_n)$ est divisible par tous les F_i. En outre, si G est un polynôme tel que F_i divise G pour tout i, alors G est divsible par $\mathrm{ppcm}(F_1, \ldots, F_n)$.

Définition 3.6.7. — Soit F un polynôme unitaire dans $K[X]$. On appelle *facteur irréductible* tout polynôme unitaire irréductible P (de degré $\geqslant 1$) tel que $v_P(F) > 0$. L'entier $v_P(F)$ s'appelle la *multiplicité* de P dans la décomposition de F.

Soit V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endormorphisme de V. On considère l'homomorphisme d'anneaux de $K[X]$ vers $\mathrm{End}(V)$ qui envoie $F \in K[X]$ en $F(\varphi)$. Le noyau de cet homomorphisme est un idéal non-nul de $K[X]$ puisque $\mathrm{End}(V)$ est un espace vectoriel de type fini (il existe alors un n tel que les endomorphismes $\mathrm{Id}_V, \varphi, \ldots, \varphi^n$ sont dépendents). On appelle *polynôme minimal* de φ le polynôme unitaire qui généralise cet idéal, noté F_φ. Pour tout polynôme unitaire irréductible P, on désigne par $\mathcal{E}_P(\varphi)$ le noyau de l'endormorphisme $P(\varphi)^{v_P(F_\varphi)}$. C'est un sous-espace vectoriel de V, qui réduit à l'espace nul lorsque P n'est pas un facteur irréductible de F_φ.

Lemme 3.6.8. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V.*

1) *Si W est un sous-espace vectoriel de V qui est stable par l'action de φ, et si ψ est la restriction de φ à W, alors F_φ est divisible par F_ψ.*
2) *Soit $(V_i)_{i=1}^n$ une famille de sous-espaces vectoriels de V telle que $V = V_1 + \cdots + V_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit φ_i la restriction de φ à V_i. Alors*
$$F_\varphi = \mathrm{ppcm}(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}).$$
3) *Soit $(F_i)_{i=1}^n$ une famille de polynômes dans $K[X]$. On suppose que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, les polynômes F_i et F_j ne sont pas divisibles en même temps par aucun polynôme unitaire irréductible de degré $\geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $V_i = \mathrm{Ker}(F_i(\varphi))$. Alors, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$, $x_1 + \cdots + x_n = 0$ implique $x_1 = \cdots = x_n = 0$.*

Démonstration. — 1) Par définition, pour tout $x \in V$, on a $F_\varphi(\varphi)(x) = 0$. En particulier, $F_\varphi(\psi) = 0$. Donc F_φ est divisible par F_ψ.

2) Soit $G = \mathrm{ppcm}(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $x \in V_i$, on a
$$G(\varphi)(x) = G(\varphi_i)(x) = 0.$$
On en déduit $G(\varphi) = 0$ et donc G est divisible par F_φ. Or, d'après 1), F_φ est divisible par chaqu'un des F_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$). Donc F_φ est divisible par G. Donc $F_\varphi = \mathrm{ppcm}(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n})$.

3) Chacun des espaces vectoriel V_i est invariant par l'action de φ. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on désigne par φ_i la restriction de φ à V_i, considérée comme un endormophsme de V_i. Par définition, le polynôme minimal F_{φ_i} divise F_i.

Montrons que, si i et j sont deux indices distincts, alors la restriction de $F_j(\varphi)$ à V_i est une bijection. Soit W l'espace vectoriel des $x \in V_i$ tels que $F_j(\varphi) = 0$, qui est invariant par l'action de φ. Soit η la restriction de φ à W, considéré comme un endormorphisme de W. D'après 1), F_η divise F_{φ_i}, donc divise F_i. En outre, comme

$F_j(\eta) = 0$, on obtient que F_η divise F_j. Or F_i et F_j ne sont pas divisible par aucun polynôme unitaire irréductible, on obtient $F_\eta = 1$, et donc $W = 0$.

Enfin, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit

$$G_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} F_j.$$

La restriction de $G_i(\varphi)$ à V_i est une bijection. Comme

$$0 = G_i(\varphi)(x_1 + \cdots + x_n) = G_i(\varphi)(x_i),$$

on obtient $x_i = 0$. □

Théorème 3.6.9. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V.*

1) *Pour tout facteur irréductible P de F_φ qui est de degré $\geqslant 1$, l'espace vectoriel $\mathcal{E}_P(\varphi)$ est non-nul, et est invariant par l'action de φ.*
2) *Si $P_1, \dots, P_n$ sont les facteurs irréductibles distincts de F_φ, qui sont tous de degré $\geqslant 1$, alors V est la somme directe des $\mathcal{E}_{P_i}(\varphi)$.*

Démonstration. — On suppose que le polynôme minimal F_φ s'écrit sous la forme

$$F_\varphi = \prod_{i=1}^{n} P_i^{a_i},$$

où $P_1, \dots, P_n$ sont des polynômes irréductibles distincts, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = v_{P_i}(F_\varphi)$ est strictement positif.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soient

$$G_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} P_j^{a_j},$$

et ψ_i la restriction de $G_i(\varphi)$ à $\mathcal{E}_{P_i}(\varphi)$, vue comme un endomorphsime de $\mathcal{E}_{P_i}$. D'après ce que l'on a vu dans la démonstration du lemme précédent, on obtient que ψ_i est une bijection. Pour tout $x \in V$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit

$$x_i = \psi_i^{-1}(G_i(\varphi)(x)).$$

C'est un élément de $\mathcal{E}_{P_i}(\varphi)$. Soit $y = x_1 + \cdots + x_n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $G_i(\varphi)(x) = G_i(\varphi)(y)$. On désigne par I l'ensemble des polynômes de la forme $\sum_{i=1}^{n} A_i G_i$. C'est un idéal de $K[X]$. Comme les polynômes G_i n'ont pas de facteur irréductible commun qui est de degré $\geqslant 1$. On obtient que $I = K[X]$. Par conséquent, il existe des polynômes $A_1, \dots, A_n$ tels que

$$1 = A_1 G_1 + \cdots + A_n G_n.$$

D'où

$$x = \sum_{i=1}^{n} A_i(\varphi) G_i(\varphi)(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(\varphi) G_i(\varphi)(y) = y.$$

On obtient donc

$$V = \mathcal{E}_{P_1}(\varphi) + \cdots + \mathcal{E}_{P_n}(\varphi).$$

D'après le lemme précédent, il s'agit d'une somme directe.

Enfin, si l'un des $\mathcal{E}_{P_i}(\varphi)$ est nul, disons $\mathcal{E}_{P_1}(\varphi) = 0$. Alors $V = \mathcal{E}_{P_2}(\varphi)+\cdots+\mathcal{E}_{P_n}(\varphi)$ et donc $G_1(\varphi) = 0$. On obtient alors que G_1 est divisible par F_φ. Cela est absurde. $\square$

Remarque 3.6.10. — Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. Soient P un polynôme irréductible et φ_P la restriction de φ à $\mathcal{E}_P(\varphi)$, vu comme un endomorphisme de $\mathcal{E}_P(\varphi)$. Le polynôme minimal F_{φ_P} est égal à $P^{v_P(F_\varphi)}$. En effet, si P n'est pas un facteur irréductible de degré $\geqslant 1$ de F_φ, alors $\mathcal{E}_P(\varphi) = 0$ et donc $F_{\varphi_P} = 1$. Supposons que $P_1, \ldots, P_n$ sont des facteurs irréductibles de degré $\geqslant 1$ et que

$$F_\varphi = \prod_{i=1}^n P_i^{a_i}$$

avec $a_i \geqslant 1$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit φ_i la restriction de φ à $\mathcal{E}_{P_i}(\varphi)$. Comme $P_i^{a_i}(\varphi_i) = 0$, on obtient que F_{φ_i} divise $P_i^{a_i}$, donc il existe un entier $b_i \in \{0, \ldots, a_i\}$ tel que $F_{\varphi_i} = P_i^{b_i}$. D'après le théorème 3.6.9 et le lemme 3.6.8 3), on obtient

$$F_\varphi = \prod_{i=1}^n P_i^{a_i},$$

et donc $a_i = b_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Corollaire 3.6.11. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. L'endomorphisme V est diagonalisable si et seulement si F_φ s'écrit sous la forme*

$$F_\varphi(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

où $(\lambda_i)_{i=1}^n$ sont des éléments distincts dans K.

Lemme 3.6.12. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. Si le polynôme minimal de φ est un polynôme unitaire irréductible P, qui est de degré $d \geqslant 1$, alors le rang de V est un multiple de d.*

Démonstration. — L'espace V est clairement non-nul (sinon le polynôme minimal devrait être 1). Choisissons un élément $x \neq 0$ dans V. Soit

$$W = \{F(\varphi)(x) \mid F \in K[X]\}.$$

C'est un sous-espace de V qui est stable par l'action de φ. En outre, $(\varphi^i(x))_{i=0}^{d-1}$ est une base de W. Donc $\mathrm{rg}(W) = d$. L'endomorphisme φ induit par passage au quotient un endomorphisme $\bar{\varphi}$ de V/W. Si V/W est nul, alors $\mathrm{rg}(V) = d$, sinon le rang de V/W est plus petit que celui de V. En outre, on a $P(\bar{\varphi}) = 0$, qui implique

que le polynôme minimal de $\bar{\varphi}$ est encore P (car P est irréductible). Par récurrence on obtient que $\mathrm{rg}(V)$ est une multiple de d. □

Proposition 3.6.13. — *Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. On suppose que F_φ est de la forme P^a, où P est un polynôme irréductible de degré $d \geqslant 1$, a est un entier $\geqslant 1$. Alors le rang de V est une multiple de d, et est minoré par da.*

Démonstration. — Pour le cas général, on considére la famille $(V_i)_{i=0}^a$ de sous-espaces de V définie comme: $V_0 = V$, et pour tout $i \in \{1,\ldots,a\}$, $V_i = \{P^i(\varphi)(x) \,|\, x \in V\}$. Ce sont des sous-espaces stables par l'action de φ. On a

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_a = 0.$$

Pour tout $i \in \{1,\ldots,a\}$, l'endomorphisme φ induit par passage au quotient un endomorphisme φ_i de V_{i-1}/V_i. En outre, on a $P(\varphi_i) = 0$, qui implique $F_{\varphi_i} = P$. D'après le lemme précédent, $\mathrm{rg}(V_{i-1}/V_i)$ est une multiple de d (et est minoré par d). Comme

$$\mathrm{rg}(V) = \sum_{i=1}^a \mathrm{rg}(V_{i-1}/V_i),$$

on obtient alors que $\mathrm{rg}(V)$ est une multiple de d, et est minoré par da. □

Définition 3.6.14. — Soient V un espace vectoriel de type fini sur K et φ un endomorphisme de V. Supposons que le polynôme minimal de φ est de la forme

$$F_\varphi = \prod_{i=1}^n P_i^{a_i},$$

où $P_1,\ldots,P_n$ sont des polynômes irréductibles distincts, $a_1,\ldots,a_n$ sont des entiers $\geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, soit $b_i = \mathrm{rg}(\mathcal{E}_{P_i}(\varphi))/\deg(P_i)$. Le polynôme

$$G_\varphi := \prod_{i=1}^n P_i^{b_i}$$

est appelé le *polynôme caractéristique* de φ.

D'après la proposition 3.6.13, on obtient que le polynôme caractéristique est divisible par le polynôme minimal. En particulier, on a $G_\varphi(\varphi) = 0$.

Le théorème ci-dessous fournit une méthode à calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme. On admet le résultat suivant, qui sera démontré dans le cours "*Analyse complexe*":

> *tout polynôme unitaire irréductible différent de* 1 *dans* $\mathbb{C}[X]$ *est de la forme* $X - \lambda$*, où* λ *est un nombre complexe.*

Lemme 3.6.15. — *Soient V un espace vectoriel de type fini et non-nul sur $\mathbb{C}$, et η un endomorphisme. Supposons que η est nilpotent, autrement dit, il existe un entier*

$m \geqslant 1$ tel que $\eta^m = 0$. Alors il existe une base $(x_i)_{i=1}^r$ de V tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\eta(x_i)$ est dans le sous-espace vectoriel engendré par $\{x_{i+1}, \dots, x_r\}$.

Démonstration. — Le polynôme minimal de η est de la forme X^n, où $n \geqslant 1$ est un entier. Considérons les sous-espaces $(V_i)_{i=0}^n$ de V définis comme:

$$V_0 = V, \quad V_i = \eta^i(V) \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}.$$

On a $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n = 0$. D'après la proposition 3.2.1 (utilisée récurssivement sur V_i/V_{i+1}), on peut construire une base $(x_i)_{i=1}^r$ de V telle que

$$\{x_{r-r_i+1}, \dots, x_r\} \subset V_i$$

quel que soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$, où $r_i = \mathrm{rg}(V_i)$. Comme η envoie V_i dans V_{i+1}, le lemme est donc démontré. □

Théorème 3.6.16. — *Soient V un espace vectoriel de type fini et non-nul sur $\mathbb{C}$ et φ un endomorphisme de V. Pour tout nombre complexe λ, on a*

$$G_\varphi(\lambda) = \mathrm{dét}(\lambda \,\mathrm{Id}_V - \varphi).$$

Démonstration. — Supposons que le polynôme minimal de φ est de la forme

$$F_\varphi(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{a_i},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres complexes distincts, et $a_1, \dots, a_n$ sont des entiers $\geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soient V_i l'espace $\mathcal{E}_{X-\lambda_i}(\varphi)$ et r_i le rang de V_i.

D'après le théorème 3.6.9, l'espace V est la somme directe des V_i. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit ψ_i l'endomorphisme de V_i défini comme $\psi_i = \varphi_i - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{V_i}$. C'est un endomorphisme nilpotent: on a $\psi_i^{a_i} = 0$. Il existe donc (d'après le lemme précédent) une base $(x_j^{(i)})_{j=1}^{r_i}$ de V_i tel que $\psi_i(x_j^{(i)})$ soit dans le sous-espace vectoriel de V_i engendré par $\{x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}\}$, où r_i est le rang de V_i. On obtient alors

$$\mathrm{dét}(\lambda \,\mathrm{Id}_{V_i} - \varphi_i) = \mathrm{dét}((\lambda - \lambda_i) \,\mathrm{Id}_{V_i} - \psi_i) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i}.$$

Enfin, comme V est la somme directe des V_i, on a

$$\mathrm{dét}(\lambda \,\mathrm{Id}_V - \varphi) = \prod_{i=1}^n \mathrm{dét}(\lambda \,\mathrm{Id}_{V_i} - \varphi_i) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{r_i} = G_\varphi(\lambda).$$

□