Université Paris 7 Denis Diderot
M2 Théorie des intersections
2011-2012

Contrôle de connaissance
du 28 février 2010 (13h30–16h30)

Les notes du cours sont autorisées. Les deux parties de l'épreuve sont indépendantes.

La première partie

Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé (i.e. le morphisme diagonal $\Delta : X \to X \times X$ est quasi-compact). Pour tout point $x \in X$, on désigne par $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x et par $\kappa(x)$ son corps résiduel. Pour tout $x \in X$, on désigne par $j_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \to X$ le morphisme de schémas qui définit l'inclusion de x dans X. Si x est un point de X et si s est une section globale d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L, on désigne par $s(x)$ l'image canonique de s dans $j_x^* L$. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, on définit $X_s := \{x \in X \mid s(x) \neq 0\}$.

1. Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $s \in \Gamma(X, L)$. Montrer que X_s est un sous-ensemble ouvert de X.

On désigne par $\mathcal{U}_X$ la collection des ouverts de X de la forme X_s, où s parcourt toutes les sections globales des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles. On dit que X est un schéma *divisoriel* si $\mathcal{U}_X$ est une base de topologie de X (autrement dit, tout sous-ensemble ouvert de X est l'union d'éléments de $\mathcal{U}_X$).

2. Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et s une section globale de L. On suppose que X_s est contenu dans un ouvert affine de X. Montrer que, pour tout $x \in X_s$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une section $t \in \Gamma(X, L^{\otimes n})$ telle que $x \in X_t \subset U$. (*Indication. On peut utiliser le fait suivant : si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et si θ est une section de $\mathcal{F}$ sur X_s, alors il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $s^n \theta$ s'étende en une section globale de $L^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$*).

3. En déduire que, si $\mathcal{U}_X$ contient un recouvrement ouvert de X qui est plus fin qu'un recouvrement par des ouverts affines, alors X est un schéma divisoriel.

4. En déduire que le produit de deux schémas divisoriels est encore divisoriel.

Si L est un $\mathcal{O}_X$-modules inversible, on désigne par $\mathcal{U}_L$ la collection des ouverts de X de la forme

$$\bigcup_{n \geqslant 1} \{X_s \mid s \in \Gamma(X, L^{\otimes n})\}.$$

Si $\mathscr{A}$ est une collection de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles, on note $\mathcal{U}_{\mathscr{A}} := \bigcup_{L \in \mathscr{A}} \mathcal{U}_L$.

5. Montrer que, si X est divisoriel, alors il existe une famille finie $\mathscr{A}$ de $\mathcal{O}_X$-modules inversibles telle que $\mathcal{U}_{\mathscr{A}}$ soit une base de topologie de X.

6. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvet de X par des ouverts affines. Montrer que, si X est divisoriel, alors $\mathcal{U}_X$ contient un recouvrement de X par des ouverts affines qui est plus fin que $\mathcal{U}$.

7. Soient L un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $s \in \Gamma(X, L)$ une section telle que X_s soit affine. Montrer que, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le $\mathcal{O}_{X_s}$-module $(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n})|_{X_s}$ soit engendré par un nombre fini de sections dans $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes n})$.
8. En déduire que, si X est divisoriel, alors pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et de type fini $\mathcal{F}$, il existe un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E et un homomorphisme surjectif de E vers $\mathcal{F}$.
9. On suppose que, pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et factoriel. Montrer que X est un schéma divisoriel.
10. (Question du cours) Expliquer brièvement pourquoi le résultat comme ci-dessus permet d'enlever la condition de quasi-projectivité dans le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck.

La deuxième partie

Dans les exercices **11**–**16**, on fixe un λ-anneau K. Pour toute série

$$F(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots \in K[\![T]\!],$$

on désigne par $F'(T)$ la série $\sum_{n\geqslant 1} n a_n T^{n-1}$. Pour tout $x \in K$, on désigne par $\psi(x)$ la série

$$\frac{\lambda(x)'(-T)}{\lambda(x)(-T)}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in K$, on désigne par $\psi_n(x)$ le coefficient de T^{n-1} dans la série $\psi(x)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit

$$\varphi_n(T) := 1 + T + \cdots + T^{n-1} \in \mathbb{Z}[T].$$

11. Montrer que $\psi : (K, +) \to (K[\![T]\!], +)$ est un homomorphisme de groupes.
12. Montrer que, pour tout élément $\ell \in K_1$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a $\psi_n(\ell) = \ell^n$.
13. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que ψ_n est un homomorphisme d'anneaux de K dans lui-même.
14. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un homomorphisme de semi-groupes $\Phi_n : (K_+, +) \to (K_+, \times)$ tel que, pour tout $u \in K_+$ qui se scinde dans une extension K' de K comme la somme des éléments $\ell_1, \ldots, \ell_r$, alors $\Phi_n(u) = \varphi_n(\ell_1) \cdots \varphi_n(\ell_r)$. Montrer que pour tout $u \in K_+$ on a

$$\psi_n(\lambda(u)(-1)) = \lambda(u)(-1) \cdot \Phi_n(u).$$

Dans les exercices **15** *et* **16**, *on suppose que K est une $\mathbb{Q}$-algèbre.*

15. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $H_n : \widehat{\mathrm{Gr}}^\bullet(K) \to \widehat{\mathrm{Gr}}^\bullet(K)$ l'endomorphisme d'anneaux qui envoie $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$ en $(\xi_0, n\xi_1, \ldots, n^k \xi_k, \ldots)$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $u \in K_+$, on a

$$\mathrm{ch}(\Phi_n(u)) = n^{\varepsilon(u)} \mathrm{Td}(u^\vee) H_n(\mathrm{Td}(u^\vee)^{-1}).$$

16. On dit que la filtration γ sur K est *séparée* si $F^n(K) = 0$ pour n suffisamment grand. Montrer que, si la filtration γ sur K est séparée, alors $\mathrm{ch} : K \to \mathrm{Gr}^\bullet(K)$ est un isomorphisme d'anneaux.

Dans les questions qui suivent, on se donne un foncteur de Riemann-Roch K sur une catégorie $\mathcal{C}$. On suppose en outre que la partie contravariante du foncteur de Riemann-Roch K est un foncteur de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dans la catégorie des λ-anneaux.

17. On suppose que $j : Y \to X$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $j^K : K(X) \to K(Y)$ soit surjectif et qu'il existe un élément $u \in K(X)_+$ qui vérifie $j_K(1) = \lambda(u)(-1)$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(Y) \arrow[r, "\psi_n(\cdot)\tau_n"] \arrow[d, "j_K"'] & K(Y) \arrow[d, "j_K"] \\ K(X) \arrow[r, "\psi_n"'] & K(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $\tau_n := \Phi_n(j^K(u))$.

18. En déduire que, si X est un schéma noethérien, quasi-séparé, connexe et régulier, et si $j : Y \to X$ est une immersion régulière dont le faisceau conormale est $C_{Y/X}$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(Y) \arrow[r, "\psi_n(\cdot)\tau_n"] \arrow[d, "j_K"'] & K(Y) \arrow[d, "j_K"] \\ K(X) \arrow[r, "\psi_n"'] & K(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $\tau_n := \Phi_n(C_{Y/X})$. (*Indication : utiliser la déformation au cône normal*).

19. En déduire que, si X est un schéma noethérien, quasi-séparé, connexe et régulier, et si $j : Y \to X$ est une immersion régulière de codimension d, alors pour tout entier n, on a $j_K(F^n K(Y)_{\mathbb{Q}}) \subset F^{n+d} K(X)_{\mathbb{Q}}$.

20. On suppose que, pour tout objet Z dans $\mathcal{C}$, l'anneau $K(Z)$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre et que la filtration γ sur $K(Z)$ est séparée. Soit $\pi : P \to X$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. On suppose qu'il existe $u \in K(X)_+$ tel que $K(P)$ soit isomorphe comme $K(X)$-algèbre (via $\pi^K : K(X) \to K(P)$) à $K(X)_u$ et que $\pi_K : K(P) \to K(X)$ s'identifie à π_u. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(P) \arrow[r, "\psi_n(\cdot)\tau'_n"] \arrow[d, "\pi_K"'] & K(P) \arrow[d, "\pi_K"] \\ K(X) \arrow[r, "\psi_n"'] & K(X) \end{tikzcd}$$

est commutatif, où $\tau'_n = n\Phi_n(u\theta^\vee)^{-1}$ et θ est le générateur canonique de $K(P)$ comme $K(X)$-algèbre. On peut commencer par justifier que $\Phi_n(u\theta^\vee)$ est inversible. (*Indication : appliquer le théorème de Riemann-Roch pour* ch).

Annexe

1. Soient K un anneau et $\lambda : K \to \Lambda(K) := 1 + TK[\![T]\!]$ une application. On dit que (K, λ) est un *pré-λ-anneau* (ou en abrégé, que K est un pré-λ-anneau) si $\lambda : (K, +) \to (\Lambda(K), \times)$ est un morphisme de groupes tel que $\lambda(a) \in 1 + aT + T^2K[\![T]\!]$ quel que soit $a \in K$. En particulier, $\mathbb{Z}$ est un pré-λ-anneau avec $\lambda(n) = (1 + T)^n$. Pour tout $a \in K$ et tout entier $k \geqslant 0$, on désigne par $\lambda_k(a)$ le coefficient de T^k dans la série $\lambda(a)$.

2. Soient K et K' deux pré-λ-anneaux. On appelle *homomorphisme* de pré-λ-anneaux de K vers K' tout homomorphisme d'anneaux $f : K \to K'$ tel que $\lambda(f(a)) = f(\lambda(a))$ pour tout $a \in K$, où on a étendu f en un homomorphisme de $K[\![T]\!]$ vers $K'[\![T]\!]$ de façon évidente. On dit que K' est une *extension* de K si f est une application injective.

3. Soit K un pré-λ-anneau. On appelle *augmentation* tout homomorphisme surjectif de pré-λ-anneaux $\varepsilon : K \to \mathbb{Z}$.

4. Soit K un pré-λ-anneau muni d'une augmentation ε. On appelle *structure positive* tout sous-ensemble K_+ de K stable par l'addition et la multiplication, et qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $1 \in K_+$,

(2) tout élément de K est la différence de deux éléments de K_+,

(3) pour tout $a \in K_+$, $\varepsilon(a) > 0$,

(4) pour tout $a \in K_+$ avec $r = \varepsilon(a)$, on a $\lambda_k(a) = 0$ si $k > r$, et $\lambda_r(a)$ est un élément inversible dont l'inverse est dans K_+.

On désigne par K_1 le sous-enesmble de K des éléments $\ell \in K_+$ tels que $\varepsilon(\ell) = 1$. Si un élément $u \in K$ s'écrit comme la somme d'éléments dans K_1, on dit que u se scinde dans K. On dit que (K, ε, K_+) est *spécial* si toute famille finie d'éléments dans K_+ se scindent simultanément dans une extension de K (munie d'une augmentation qui prolonge ε et d'une structure positive qui continent K_+).

5. Soit K un pré-λ-anneau muni d'une augementation ε et d'une structure positive K_+. On appelle *involution* sur K tout homomorphisme d'anneaux $\iota : K \to K$, $a \mapsto a^\vee$ qui vérifie les conditions suivantes :

(1) pour tout $a \in K$, on a $a^{\vee\vee}$,

(2) pour tout $a \in K$, on a $\varepsilon(a^\vee) = \varepsilon(a)$,

(3) pour tout $\ell \in K_1$, on a $\ell\ell^\vee = 1$.

On dit que $(K, \varepsilon, K_+, \iota)$ est un *λ-anneau* (ou en abrégé, que K est un λ-anneau) si (K, ε, K_+) est spécial et si tout élément de K_+ se scinde dans une extension de K où l'involution ι se prolonge (en une involuation sur l'extension).

6. Soit K un λ-anneau. On désigne par $\gamma : (K, +) \to (\Lambda(K), \times)$ l'homomorphisme de groupes tel que $\gamma(a)(T) = \lambda(a)(T/(1 - T))$. Pour tout $a \in K$ et tout entier $k \geqslant 0$, soit $\gamma_k(a)$ le coefficient de T^k dans la série $\gamma(a)$. On définit une $\mathbb{N}$-filtration décroissante F (appelée la *filtration γ*) sur K telle que $F^0(K) = K$, $F^1(K) = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et que $F^n(K)$ est le sous-groupe de $(K, +)$ engendré par les éléments de la forme $\gamma_{r_1}(x_1) \cdots \gamma_{r_k}(x_k)$, où $r_1, \ldots, r_k$ sont des entiers positifs vérifiant $r_1 + \cdots + r_k \geqslant n$ et

$x_1, \ldots, x_k$ sont des éléments dans $F^1(K)$. On désigne par $\mathrm{Gr}^\bullet(K)$ l'anneau gradué associé à cette filtration. Soit en outre $\widehat{\mathrm{Gr}}^\bullet(K)$ l'anneau $\prod_{i\geqslant 0}\mathrm{Gr}^i(K)$. Pour tout $a \in K$ et tout entier $i \geqslant 0$, on désigne par $c_i(a)$ la classe de $\gamma_i(a-\varepsilon(a))$ dans $\mathrm{Gr}^i(K)$.

7. Soient K un λ-anneau et $u \in K_+$. Soit $r = \varepsilon(u)$. On désigne par K_u l'anneau quotient $K[T]/(P_u)$, où $P_u(T) := \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\lambda_i(u)T^{r-i}$. L'image θ de T dans cet anneau quotient est appelée le *générateur canonique* de K_u. Il existe une unique structure de λ-anneau sur K_u telle que $\theta \in K_{u,1}$ et que $u-\theta \in K_{u,+}$. L'anneau K_u est un K-module libre engendré par $1, \theta^{-1}, \ldots, \theta^{1-r}$. On désigne par $\pi_u : K_u \to K$ l'application K-linéaire tel que $\pi_u(1) = 1$ et que $\pi_u(\theta^{-k}) = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, r-1\}$.

8. Soit K un λ-anneau dont l'anneau sous-jacent est une $\mathbb{Q}$-algèbre. Il existe un unique morphisme d'anneaux $\mathrm{ch} : K \to \widehat{\mathrm{Gr}}^\bullet(K)$ tel que, pour tout élément $u \in K_+$ qui se scinde dans une extension K' de K comme la somme des éléments $\ell_1, \ldots, \ell_r \in K'_1$, on ait

$$\mathrm{ch}(u) = \sum_{i=1}^{r}\exp(c_1(\ell_i)).$$

De façon similaire, il existe un unique morphisme de groupes $\mathrm{Td} : (K,+) \to \widehat{\mathrm{Gr}}^\bullet(K)^\times$ tel que, pour tout élément $u \in K_+$ qui se scinde dans une extension K' de K comme la somme des éléments $\ell_1, \ldots, \ell_r \in K'_1$, on ait

$$\mathrm{Td}(u) = \prod_{i=1}^{r}\varphi(c_1(\ell_i))),$$

où

$$\varphi(T) := \frac{T\exp(T)}{\exp(T)-1} \in \mathbb{Q}[\![T]\!].$$

9. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On appelle *foncteur de Riemann-Roch* sur $\mathcal{C}$ les données suivantes :

(1) d'un foncteur contravariant K de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des anneaux commutatifs et unifères (l'homomorphisme d'anneaux associé à un morphisme f dans $\mathcal{C}$ est noté comme f^K),

(2) d'un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégories des groupes abéliens dont l'application entre les classes sous-jacentes s'identifie à celle de K (l'homomorphisme de groupes associé à un morphisme f dans $\mathcal{C}$ est noté comme f_K),

soumises à la condition de projection : pour tout morphisme $f : X \to Y$, on a

$$f_K(xf^K(y)) = f_K(x)y \qquad (\forall\, x \in K(X),\, y \in K(Y)).$$