Pas de cours le 19/01/12

Programme du cours

- théorie d'intersection géométrique
- théorème de Riemann-Roch-Grothendieck
- théorie d'intersection arithmétique
- hauteur des variétés arithmétique
- aspect combinatoire : variétés toriques

Deux examens indépendents :

Références

- Fulton. Intersection theory. Springer
- Fulton-Lang Riemann-Roch algebra Springer
- SGA Théorie des intersections et Théorème de Riemann-Roch LNM 225
- Gillet-Soulé Arithmetic intersection theory Publ. IHÉS no. 72 (1990) 93-174
- Bost-Gillet-Soulé. Heights of projective variétés and positive Green forms J. Amer. Math. Soc. 7 (1994) no. 4. 903-1027
- Fulton Introduction to toric varieties. Ann. of Math. Studies 131
- Burgos, Philippon. Sombra. Arithmetic geometry of toric varieties: metrics, measures and heights. Arxiv. 1105.5584

Introduction>

Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck :

la comparaison des foncteurs images directe de la K-théorie et de la théorie de cohomologie.

X variété algébrique lisse / $\mathbb{C}$

$K(X)$ groupe abélien libre engendré par les fibrés vectoriels sur X, modulo les relations $[E] = [E'] + [E'']$ pour toute suite exacte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$

$K(X)$ est un anneau : $[E]\cdot[F] = [E \otimes F]$

$f : X \to Y$ morphisme de variété

$\leadsto$ $f^K : K(Y) \to K(X)$ induit par l'image réciproque

$$f^K([E]) = [f^*E]$$

c'est un morphisme d'anneaux

Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre on a le morphisme de Gysin $f_K : K(X) \to K(Y)$

c'est un morphisme de groupes.

eg. Si Y réduit à un point $(K(Y) = \mathbb{Z})$

on a
$$f_K([E]) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \dim_{\mathbb{C}} H^k(X, E)$$

<u>Théorie de cohomologie</u> $H^{\cdot}(X)$ vu comme une variété différentielle (réelle)

peut se réaliser comme
- cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{C}$
- cohomologie définie par les formes différentielles
- cohomologie de Dolbeault ...

C'est un anneau gradué (cups produit)

À tout fibré vectoriel E sur X, on associe un élément $c(E) \in H^{\cdot}(X)$

$$c(E) = 1 + \sum_{i \geq 1} c_i(E) \qquad c_i(E) \in H^{2i}(X).$$

On écrit formellement $c(E)$ sous la forme $\prod_{i=1}^{r} (1 + x_i)$

avec $r = \mathrm{rg}(E)$ (on imagine que x_i est un élément de $H^2(X)$)

ainsi $c_i(E) = s_i(x_1, \dots, x_d)$

où s_i est le $i^{\text{ème}}$ polynôme symétrique fondamentale.

On note
$$ch(E) = \sum_{i=1}^{r} \exp(x_i)$$

<u>Proposition</u>. $ch : K(X) \to H^{\cdot}(X)$ est un morphisme d'anneaux

dans le cas où X est un point.

$$K(X) \simeq \mathbb{Z} \qquad [E] \longrightarrow rg(E)$$

$$H^{\cdot}(X) \simeq \mathbb{C}$$

$ch : K(X) \longrightarrow H^{\cdot}(X)$ est le plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$

Fonctorialité des cohomologies.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme lisse on a une application

$f^H : H^{\cdot}(Y) \longrightarrow H^{\cdot}(X)$ induit par l'image reciproque.

C'est un morphisme d'anneaux gradués.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre on a un morphisme de groupes

$$f_H : H^{\cdot}(X) \longrightarrow H^{\cdot}(Y)$$

induit par l'intégrale le long des fibres.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{ch} & H^{\cdot}(Y) \\ f^K \downarrow & & \downarrow f^H \\ K(X) & \xrightarrow[ch]{} & H^{\cdot}(X) \end{array}$$

et un diagramme non-necessairement commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{ch} & H^{\cdot}(X) \\ f_K \downarrow & & \downarrow f_H \\ K(Y) & \xrightarrow[ch]{} & H^{\cdot}(Y) \end{array}$$

Terme correctif : classe de Todd du tangent relatif à f :

pour un fibré E avec $c(E) = \prod_{i=1}^{r} (1 + x_i)$

$$Td(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{x_i}{1 - e^{-x_i}}$$

(c'est une classe inversible)

$$\mathrm{Td}(Tf) = \mathrm{Td}(TX) \cdot f^H(\mathrm{Td}(TY)^{-1})$$

Théorème (Riemann-Roch-Grothendieck)

$$f_H(ch(E) \cdot \mathrm{Td}(Tf)) = ch(f_K([E]))$$

pour tout fibré vectoriels E

Dans le cas où Y réduit à un point, on a $\mathrm{Td}(Tf) = \mathrm{Td}(TX)$

on obtient

$$f_H(ch(E) \cdot \mathrm{Td}(TX)) = \sum_k (-1)^k \dim_{\mathbb{C}} H^k(X, E)$$

(Théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch)

Supposons que X est une courbe lisse

TX est un fibré vectoriel de rang 1

$c(TX) = 1 + c_1(TX)$ $\quad\quad c_1(TX)^2 = 0$

$\mathrm{Td}(TX) = 1 + \frac{1}{2} c_1(TX)$ $\quad\quad ch(E) = r + c_1(E)$

$(r = rk(E))$

Riemann-Roch-Hirzebruch $\Rightarrow$

$$f_H\left(\frac{r}{2} c_1(TX) + c_1(E)\right) = \underbrace{\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, E) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, E)}_{=\,\chi(E)}$$

$$\deg(E) - \frac{r}{2} \deg(\omega_X) = \chi(E)$$

où $\omega_X = (TX)^\vee$

Si on applique ce résultat à $E = \mathcal{O}_X$, on obtient

$$-\frac{1}{2} \deg(\omega_X) = 1 - g \quad\quad \text{avec } g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

$$\Rightarrow \deg(\omega_X) = 2g - 2$$

L'égalité peut être ré-écrite comme

$$\chi(E) = \deg(E) + rg(E)(1-g)$$

On suppose que X est de dimension d. $E = L$ est un fibré en droites.

$$ch(L) = \sum_{0 \le i \le d} \frac{c_1(L)^i}{i!} \qquad ch(L^{\otimes D}) = \sum_{0 \le i \le d} \frac{c_1(L)^i}{i!} D^i$$

Riemann-Roch-Hirzebruch donne

$$\int_H (ch(L^{\otimes D}) \cdot Td(TX)) = \chi(L^{\otimes D})$$

$$\rightsquigarrow \lim_{D \to \infty} \frac{\chi(L^{\otimes D})}{D^d / d!} = \deg(c_1(L)^n)$$

(Riemann-Roch asymptotique)

Géométrie arithmétique : géométrie sur un corps de nombres
corps de nombre : extension finie de $\mathbb{Q}$
Vision d'Arakelov : un corps de nombre K est le corps des fonction rationnel sur un schéma régulier de dimension 1. $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$
($\mathcal{O}_K$ est la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K)
Similitude aux corps de fonctions (extension finie de $k(T)$. où k est un corps de base)
Si K' est un corps de fonctions. Il existe une courbe régulière C définie sur k telle que $K' = k(C)$.
Le cas de $k(T)$: $C = \mathbb{P}^1_k$
Le cas général : la normalisation de $\mathbb{P}^1_k$ dans $\operatorname{Spec} K'$.
Si x est un point fermé de C, alors $\mathcal{O}_{C,x}$ est un anneau local, régulier et de dimension 1 $\rightsquigarrow$ anneau de valuation discrète
On désigne par v_x la valuation correspondant.

<u>Théorème</u> (formule de produit)
Pour tout élément $f \in k(C)^\times$, on a

$$\sum_{\substack{x \in C \\ x \text{ fermé}}} v_x(f) \, [k(x) : k] = 0.$$

Remarque ① Si L est un fibré inversible sur C. s est une section rationnelle de L (une section de $K'\otimes_{\mathcal{O}_C} L$), $s\neq 0$ alors

$$\deg(c_1(L)) = \sum_{\substack{x\in C \\ x \text{ fermé}}} v_x(s)\,[k(x):k]$$

(le terme à droite ne dépend pas du choix de s. grâce à la formule de produit.

② $H^0(C,L) = \{ s\in K'\otimes_{\mathcal{O}_C} L \mid v_x(s)\geq 0 \text{ pour tout } x\}$

(est un espace de rang fini sur k) $h^0(C,L) = \mathrm{rg}_k H^0$

$\left(\text{Si } k \text{ est fini. } h^0 = \dfrac{\log \# H^0}{\log \# k}\right)$

Revenons vers l'arithmétique :

points fermés dans $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$: idéal maximal de $\mathcal{O}_K$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. $\rightsquigarrow v_{\mathfrak{p}} : K \to \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$

L'Analogue naïve de la formule de produit ne marche pas pour un corps de nombres !

Théorème $\forall f\in K^\times$, $\displaystyle\sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}(f)\log \#\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} - \sum_{\sigma: K\to\mathbb{C}} \log|f|_\sigma = 0$

↑ correcteur.

Dans le cas où $K=\mathbb{Q}$. cela provient de la décomposition d'un entier non-nul en produit des puissances de nombres premiers (rationnel)

$$f = \pm\prod_p p^{v_p(f)} \rightsquigarrow \log|f| = \sum_p v_p(f)\log p$$

Il n'est pas possible de compléter $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ en un schéma propre ! les valeurs absolues $f\longmapsto |f|_\sigma$ sont archimédiennes.

Point de vue des valeurs absolues.

$$|\cdot|_{\mathfrak{p}} = (\#\mathbb{F}_{\mathfrak{p}})^{-v_{\mathfrak{p}}(f)}$$

alors la formule de produit devient $\displaystyle\left(\prod_{\mathfrak{p}} |f|_{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\prod_\sigma |f|_\sigma\right) = 1$

L'analogue naïve de H^0 : Soit L un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang 1

$$L = H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K, L) = \{ s \in L_K \mid \|s\|_{\mathfrak{p}} \leq 1 \}$$

où $\|\cdot\|_{\mathfrak{p}} : L_K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la norme sur l'espace vectoriel L_K telle que

$$\|s\|_{\mathfrak{p}} := \inf \{ |a|_{\mathfrak{p}} \mid a \in K^\times, \ a^{-1}s \in L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}} \}$$

<u>Interprétation</u> : $L \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ est la boule unité dans L_K.

Le cas où $K = \mathbb{Q}$. L est un sous-groupe de rang 1 de $\mathbb{Q}$ ($L = \mathbb{Z}$).

Dans la comparaison avec le corps de fonctions, on espère avoir

$$\hat{H}^0(L) = \{ s \in L_K \mid \|s\|_{\mathfrak{p}} \leq 1, \ \|s\|_\sigma \leq 1 \}.$$

mais il n'y a pas de façon canonique de définir $\|s\|_\sigma$.
(C'est ce qu'il faut rajouter comme information supplémentaire)

<u>Définition</u> Un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est la donnée $(E, h) =: \overline{E}$ d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang fini E avec une famille $h = (h_\sigma)_{\sigma : K \to \mathbb{C}}$ de normes, où h_σ est une norme hermitienne sur $E \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma} \mathbb{C}$. On demande en outre que la donnée h soit invariant par conjugaison complexe, i.e.

$$\Big| \sum_i e_i \otimes z_i \Big|_\sigma = \Big| \sum_i e_i \otimes \overline{z_i} \Big|_{\bar\sigma}$$

$$\hat{H}^0(\overline{E}) := \left\{ s \in E_K \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \mathfrak{p}. \ \|s\|_{\mathfrak{p}} \leq 1 \\ \forall \sigma \ \|s\|_\sigma \leq 1 \end{array} \right\} = \{ s \in E \mid \forall \sigma. \ \|s\|_\sigma \leq 1 \}$$

C'est un ensemble fini, (mais pas un semi-groupe en général !)

$$\hat{h}^0(\overline{E}) = \log \# \hat{H}^0(\overline{E})$$

Lorsque $\overline{L}$ est de rang 1, le degré d'Arakelov de $\overline{L}$ est défini comme

$$\widehat{\deg}(\overline{L}) = -\sum_{\mathfrak{p}} \log \|s\|_{\mathfrak{p}} - \sum_\sigma \log \|s\|_\sigma$$

où s est un élément non-nul de L_K.

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := \widehat{\deg}(\Lambda^{\mathrm{rg} E}\overline{E})$$

Théorème (Gillet-Soulé) Il existe un fibré inversible hermitien $\overline{\omega}_K$ et une constante C tels que pour tout fibré vectoriel hermitien $\overline{E}$ sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$, on a

$$\left| \hat{h}^0(\overline{E}) - \hat{h}^0(\overline{E}^\vee \otimes \overline{\omega}_K) - \widehat{\deg}(\overline{E}) \right| \leq C\, \mathrm{rg}(E) \log \mathrm{rg}(E).$$

Remarque ① il y a un $\log \mathrm{rg}(E)$ dans le terme d'erreur

② ressemble au théorème de Riemann-Roch pour une courbe

Théorie d'intersection arithmétique = généralisation aux dimensions supérieures

Objets : $\mathcal{X}$: schéma projectif et plat sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$. $\dim \mathcal{X} = d+1$

+ analytifiés des fibres sur les places finies.

$$\mathcal{X}^{an}(\mathbb{C}) = \mathcal{X}(\mathbb{C}) + \text{topologie analytique}$$
$$\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \coprod_{\sigma : K \to \mathbb{C}} \mathcal{X}_{K,\sigma}(\mathbb{C})$$

$\overline{L}$ fibré inversible hermitien = fibré inversible L sur $\mathcal{X}$ + métrique hermitienne continue / lisse $/ L^{an}(\mathbb{C})$.

On peut définir, pour toute sous-variété Y de $\mathcal{X}_K$, le produit d'intersection $c_1(\overline{L})^{\dim Y+1} \cdot [Y]$

$$\widehat{\deg}(c_1(\overline{L})^{\dim Y+1} \cdot [Y]) =: h_{\overline{L}}(Y)$$

Fait Si Y est un point rationnel, sa fermeture dans $\mathcal{X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$. $\rightsquigarrow$ $\mathcal{P}_Y : \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{X}$

$$\widehat{\deg}(c_1(\overline{L}) \cdot [Y]) = \widehat{\deg}(\mathcal{P}_Y^* \overline{L})$$

degré d'Arakelov.

Application $h_{\overline{L}}$ ressemble à une fonction de hauteur en géométrie diophantienne, mais sa construction est plus intrinsèque.