Déformation au cône normal

But : démontrer Riemann-Roch pour une immersion régulière générale.

Spectre homogène Soit X un schéma. Considérons une $\mathcal{O}_X$-algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{B}_\cdot$ (on suppose aussi : $\mathcal{B}_0 = \mathcal{O}_X$), supposée être engendrée par $\mathcal{B}_1$. On désigne par $\underline{\mathrm{Proj}}(\mathcal{B}_\cdot)$ le foncteur $\underline{\mathrm{Sch}}_X^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ qui envoie un X-schéma $\varphi : Y \to X$ en $\{$quotient inversible $\varphi^*(\mathcal{B}_1) \to L$ qui se prolonge en un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-algèbres graduées $\bigoplus_{n\geq 0} \varphi^*(\mathcal{B}_n) \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} L^{\otimes n}\}$

C'est un foncteur représentable (on a une immersion fermée i de $\mathrm{Proj}(\mathcal{B}_\cdot)$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{B}_1)$) On désigne par $\mathcal{O}(1)$ le faisceau inversible universel, qui est isomorphe à $i^*\mathcal{O}_{\mathcal{B}_1}(1)$.

Soit $j : Y \to X$ une immersion fermée dont l'idéal est $\mathcal{J}$. On désigne par $\mathrm{Ecl}_Y X := \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}^n)$. Le lieu exceptionnel de $\mathrm{Ecl}_Y X$ est défini comme $E := (\mathrm{Ecl}_Y X) \times_X Y$. On a un diagramme catésien

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & \mathrm{Ecl}_Y X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

$$E \cong \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}\right)$$

i est une immersion fermé dont faisceau d'idéaux est $\mathcal{O}(1)$

En outre la restriction de π à $(\mathrm{Ecl}_Y X) \setminus E$ est un isomorphism de schémas vers $X \setminus Y$.

Si j est une immersion régulière, alors $E \cong \mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X})$.

Déformation au cône normal. déformer une immersion régulière $j : Y \to X$ à $j' : Y \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X} \oplus \mathcal{O}_Y)$ (section nulle).

Soit $\mathbb{P}^1_X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X)$.

Les deux projections $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ définissent deux sections s_0 et $s_\infty : X \longrightarrow \mathbb{P}^1_X$.

Soient M l'éclatement de $\mathbb{P}^1_X$ le long de $s_\infty \circ j : Y \longrightarrow \mathbb{P}^1_X$ et $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{P}^1_X$ la projection.

On a $(s_\infty \circ j)(Y) = \mathbb{P}^1_Y \cap s_\infty(X)$. donc $\mathcal{C}_{Y/\mathbb{P}^1_X} \cong \mathcal{C}_{Y/X} \oplus \mathcal{O}_Y$

⇝ le lieu exceptionnelle de M est $P = \mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X} \oplus \mathcal{O}_Y)$.

Soit $i' : P \to M$ l'immersion fermée canonique.

Soient $p : \mathbb{P}^1_X \to X$ la projection et $\pi = p\varphi : M \to X$. On a

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[r, "s_\infty \circ j"'] & \mathbb{P}^1_X \end{tikzcd}$$

Comme $s_0(X)$ est disjoint de $s_\infty(X)$, la section $s_0 : X \to \mathbb{P}^1_X$ induit une immersion fermée $i : X \to M$

On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] \arrow[d, shift right, "\psi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\ Y \arrow[u, shift right, "j'"'] \arrow[r, "s_\infty \circ j"'] \arrow[dr, "j"'] & \mathbb{P}^1_X \arrow[d, "p"] \\ & X \arrow[uu, bend right, "i"'] \end{tikzcd}$$

$\pi i = id_X$

$\pi i' j' = j \psi j' = j$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] & M \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ Y \arrow[u, "j'"] \arrow[r, "j"'] & X \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

<u>Définition</u> Soit $\rho : K \to A$ un morphisme de Riemann-Roch sur une catégorie $\mathcal{C}$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On appelle <u>déformation</u> de f toutes données d'un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i'"] & M \arrow[d, shift right, "\pi"'] \\ Y \arrow[u, "j'"] \arrow[r, "j"'] & X \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

et une famille finie de morphismes $(h_k : C_k \to M)_{k=1}^n$ et des entiers $(m_k)_{k=1}^n$ soumises aux conditions suivantes:

(1) $\forall x \in K(Y)$ il existe $z \in K(M)$ tel que $j_K(x) = i^K(z)$ et $j'_K(x) = i'^K(z)$, et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $h_k^K(z) = 0$

(2) $i_A(1) = i'_A(1) + \sum_{k=1}^n m_k h_{k,A}(1)$

(3) $\pi i = Id_X$, $\pi i' j' = j$

<u>Théorème</u> Avec les notation comme ci-dessus. Si le morphisme j' satisfait à la propriété de Riemann-Roch relativement à un certain $\tau \in A(Y)$, alors j satisfait aussi à la propriété de Riemann-Roch relativement à τ.

<u>Démonstration</u> Soit $x \in K(Y)$. Soit $z \in K(M)$ tel que

- $j_K(x) = i^K(z)$
- $j'_K(x) = i'^K(z)$
- $\forall k,\ h_k^K(z) = 0$.

On a
$$i_A(\rho(j_K(x))) = i_A(\rho(i^K(z))) \overset{\rho \text{ est un morphisme de foncteur}}{=} i_A(i^A(\rho(z)))$$
formule de projection
$$= i_A(1)\cdot\rho(z) = i'_A(1)\,\rho(z) + \sum_{k=1}^{n} m_k\, h_{k,A}(1)\,\rho(z)$$
$$= i'_A(i'^A(\rho(z))) + \sum_{k=1}^{n} m_k\, h_{k,A}(h_k^A(\rho(z)))$$
ρ est un morphisme
$$= i'_A(\rho(i'^K(z))) + \sum_{k=1}^{n} m_k\, h_{k,A}(\underbrace{\rho(h_k^K(z))}_{=0})$$
$$= i'_A(\rho(i'^K(z))) = i'_A(\rho(j'_K(x)))$$

On applique π_A à cette égalité et obtient
$$\rho(j_K(x)) = \pi_A\, i'_A(\rho(j'_K(x))) \overset{\text{Riemann-Roch pour } j'}{=} \pi_A\, i'_A\, j'_A(\tau\cdot\rho(x))$$
$$= j_A(\tau\cdot\rho(x)).$$

Le résultat est donc démontré.

Revenons vers la déformation au cône normal en supposant Y et X intègres. Les immersion $X \underset{s_\infty}{\overset{s_0}{\rightrightarrows}} \mathbb{P}^1_X$ sont définies par des sections (nécessairement régulières) du fibré universelle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)$.

$\rightsquigarrow$ $i : X \longrightarrow M$ est défini par une section de $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)$

$\rightsquigarrow$ $i_K(1) = 1 - [\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)^\vee]$ $\quad i_A(1) = c_1(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1))$

Soit $\mathcal{O}_M(1)$ le faisceau universel de M. Par construction $\mathcal{O}_M(1)$ est le faisceau d'idéaux du lieu exceptionnel de M

l'inclusion $\mathcal{O}_M(1) \hookrightarrow \mathcal{O}_M$ correspond à une section de $\mathcal{O}_M(1)^\vee$

$\rightsquigarrow$ $i'_K(1) = 1 - [\mathcal{O}_M(1)]$ $\quad i'_A(1) = -c_1(\mathcal{O}_M(1))$

On désigne par $\tilde{X}$ l'éclatement de X le long de Y

Soit $h_1 : \tilde{X} \hookrightarrow M$ le morphisme défini (induit) par $s_\infty : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1_X$

Soit $\mathcal{I}_{\tilde{X}}$ l'idéal de $\tilde{X}$ dans M.

Soit $\mathcal{I}_P$ l'idéal de P dans M.

Alors $\mathcal{I}_{\tilde{X}} \cdot \mathcal{I}_P$ est l'idéal de $\varphi^*(s_\infty(X))$, qui est défini par une (autre) section non-nulle de $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)$.

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{I}_{\tilde{X}}$ est un idéal inversible de $\mathcal{O}_M$ (qui est isomorphe à $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)^\vee \otimes \mathcal{O}_M(1)^\vee$)

$h_{1,K}(1) = 1 - [\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)^\vee \otimes \mathcal{O}_M(1)^\vee]$

$h_{1,A}(1) = c_1(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)) + c_1(\mathcal{O}_M(1))$

Soit $h_2 : \tilde{X} \cap P \longrightarrow M$ l'inclusion.

(Remarque : $\tilde{X} \cap P$ est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X})$).

h_2 est défini par une section régulière de $(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1) \otimes \mathcal{O}_M(1)) \oplus \mathcal{O}_M(1)^\vee$

Par la résolution de Koszul, on a

$h_{2,K}(1) = 1 - [\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)^\vee \otimes \mathcal{O}_M(1)^\vee] - [\mathcal{O}_M(1)] + [\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_X}(1)^\vee]$

可以不讲

$\rightsquigarrow$ $i_K(1) - i'_K(1) = h_{1,K}(1) - h_{2,K}(1)$

$i_A(1) - i'_A(1) = h_{1,A}(1)$

Soit $F : \mathbb{P}^1_Y \longrightarrow M$ le morphisme correspondant

à $\mathbb{P}^1_Y = \mathrm{Ecl}_{s_\infty(Y)} \mathbb{P}^1_Y \longrightarrow \mathrm{Ecl}_{s_\infty(Y)} \mathbb{P}^1_X = M$

On a alors un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "s_\infty"'] & P \arrow[d, "i'"] \\ \mathbb{P}^1_Y \arrow[r, "F"'] & M \end{tikzcd}$$

Soit $x \in K(Y)$ (correspondant à $[E]$) avec E localement libre de rang fini. Soit $z = F_K\, p'^K(x)$, où $p' : \mathbb{P}^1_Y \longrightarrow Y$ est la projection.

F étant une immersion régulière, F_* est exact, donc $z = [F_*(p'^* E)]$. On note $\mathcal{F} = F_*(p'^* E)$ et on choisit une résolution $0 \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$ par des $\mathcal{O}_M$-modules localement libres de rang fini.

Comme j' est une immersion régulière de même codimension de F, on obtient que $0 \to i'^* E_n \to i'^* E_{n-1} \to \cdots \to i'^* E_0 \to i'^* \mathcal{F} \to 0$

En outre, on a $i'^* \mathcal{F} \cong i'^* F_*(p'^* E) \cong j'_* s_\infty^* p'^*(E) \cong j'_*(E)$

Donc $i'^K(z) = j'_K(x)$.

La vérification de $j_K(x) = i^K(z)$ est similaire.

Comme $\tilde{X} \cap P$ est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X})$ et $j'(Y)$ est la section nulle de $\mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X} \oplus \mathcal{O}_Y)$, on obtient que $h_1^K(z) = 0$.

<u>Conclusion</u>: La propriété de Riemann-Roch est satisfaite relativement à $\tau = \mathrm{Td}(\mathcal{C}_{Y/X}^\vee)^{-1}$.