Soit $c : K \longrightarrow A$ une transformation de Chern définie sur une catégorie $\mathcal{C}$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$. On dit que f est une projection élémentaire s'il existe $u \in K(Y)_+$, un isomorphisme $K(X) \longrightarrow K(Y)_u$ ($K(Y)$-linéaire via f^K) et un isomorphisme $A(X) \longrightarrow A(Y)_u$ ($A(Y)$-linéaire via f^A) tels que :

(1) le morphisme $f_K : K(X) \longrightarrow K(Y)$ s'identifie à $\pi_u : K(Y)_u \longrightarrow K(Y)$

(2) le morphisme $f_A : A(X) \longrightarrow A(Y)$ s'identifie à $p_u : A(Y)_u \longrightarrow A(Y)$.

<u>exemple</u> Dans la situation géométrique, si $X = \mathbb{P}(E)$ avec E un fibré vectoriel sur Y et si $f : X \to Y$ est la projection, alors f est une projection élémentaire (par rapport à $u = [E]$).

<u>Lemme</u> Soit (R, m) un anneau local (séparé et) complet, F un polynôme unitaire à coefficient dans R de la forme

$$X^r + a_{r-1} X^{r-1} + \cdots + a_0$$

où $a_i \in m$ pour tout $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Alors l'anneau quotient $R[X]/(F)$ est engendré comme R-module par les classes de $1, \ldots, X^{r-1}$.

<u>Démonstration</u> Pour tout entier $n = pr + a$ (où $p \in \mathbb{N}$, $a \in \{0, \ldots, r-1\}$) il existe un polynôme P_n de degré $\leq r-1$ à coefficients dans m^p tel que $X^n - P_n$ soit dans l'idéal engendré par F.

(on peut raisonner par récurrence sur p).

Pour $i \in \{0, \ldots, r-1\}$. Soit $\lambda_{n,i}$ le coefficient de X^i dans le polynôme P_n.

Soit $h(X) = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ une série dans $R[[X]]$. Comme R est complet, la somme $\sum_{n \geq 0} b_n \lambda_{n,i}$ converge dans R ($b_n \lambda_{n,i} \in m^p$ pour $n = pr + a$). vers une limite que l'on note comme $\varphi_i(h)$.

Soit $g(X) = \varphi_0(h) + \varphi_1(h)X + \cdots + \varphi_{r-1}(h)X^{r-1}$.

La série $h-g$ est dans l'idéal engendré par F

Remarque Si R est un anneau intègre et F est de la forme

$$(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r). \quad \text{où} \quad \lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathfrak{m}.$$

alors on peut calculer explicitement $\varphi_i(h)$ comme $\Delta_i(h)/\Delta$, où Δ est le déterminant de Vandermonde

$$(*) \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ - & - & - & - \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} =: \Delta(\lambda_1,\dots,\lambda_r).$$

et $\Delta_i(h)$ est le déterminant comme ci-dessus en remplaçant le $i^{\text{ème}}$ colone par $\begin{pmatrix} h(\lambda_1) \\ \vdots \\ h(\lambda_r) \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $\varphi_i(h)$ est un polynôme symétrique en $\lambda_1 \dots \lambda_r$.

On remplace chaque ligne de $(*)$ (sauf la $i^{\text{ème}}$ ligne) par la différence de cette ligne et la $i^{\text{ème}}$ ligne $\rightsquigarrow$

$$\Delta(\lambda_1,\dots,\lambda_r) = \det\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1-\lambda_i, & \cdots & \lambda_1^{r-1}-\lambda_i^{r-1} \\ 1 & \lambda_i, & \cdots & \lambda_i^{r-1} \\ - & - & - & - \\ 0 & \lambda_r-\lambda_i & \cdots & \lambda_r^{r-1}-\lambda_i^{r-1} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j-\lambda_i)\right)(-1)^{i+1}\det\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1+\lambda_i & \cdots & \sum_{j=0}^{r-2}\lambda_1^j\lambda_i^{r-j} \\ - & - & - & - \\ 1 & \lambda_r+\lambda_i & \cdots & \sum_{j=0}^{r-2}\lambda_i^j\lambda_r^{r-j} \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{r+i}\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)\det\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-2} \\ - & - & - & - \\ 1 & \lambda_{i-1} & \cdots & \lambda_{i-1}^{r-2} \\ 1 & \lambda_{i+1} & \cdots & \lambda_{i+1}^{r-2} \\ - & - & - & - \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-2} \end{bmatrix}$$

$$= \left((-1)^{r+i}\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)\right)\Delta(\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_r).$$

On pose $R = \mathbb{Q}[[\lambda_1, \dots, \lambda_r]]$ (l'anneau des séries formelles)

Si f est une série formelle à coefficient dans R

On a (ici $F = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r)$)

$$\varphi_{r-1}(f)\,\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \det \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-2} & f(\lambda_1) \\ - & - & - & - & - \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-2} & f(\lambda_r) \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \varphi_{r-1}(f)\,\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i} f(\lambda_i)\,\Delta(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots \lambda_r)$$

On applique cette relation à

$$f_k(X) := \exp(-kX) \prod_{j=1}^{r} \beta(X-\lambda_j)$$

avec $\beta(X) = \dfrac{X \exp(X)}{\exp(X) - 1}$ $\quad k \in \{0, \dots, r-1\}$.

alors $$\varphi_{r-1}(f_k)\,\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i} f_k(\lambda_i)\,\Delta(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots \lambda_r).$$

On a

$$f_k(\lambda_i) = e^{-k\lambda_i} \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq r}} \frac{(\lambda_i - \lambda_j)\exp(\lambda_i - \lambda_j)}{\exp(\lambda_i - \lambda_j) - 1}$$

$$= \left(\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) \right) e^{(r-1-k)\lambda_i} \left(\prod_{j \neq i} \frac{1}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}} \right)$$

$$\rightsquigarrow \varphi_{r-1}(f_k)\,\Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \sum_{i=1}^{r} e^{(r-1-k)\lambda_i} \prod_{j \neq i} \frac{1}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}} \cdot \Delta(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

$$\rightsquigarrow \varphi_{r-1}(f_k) = \sum_{i=1}^{r} e^{(r-1-k)\lambda_i} \prod_{j \neq i} \frac{1}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}$$

$$\rightsquigarrow \varphi_{r-1}(f_k)\,\Delta(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^{r} e^{(r-1-k)\lambda_i} \left(\prod_{j \neq i} \frac{1}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}} \right) \Delta(e^{\lambda_1}, \dots e^{\lambda_r})$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+i} e^{(r-1-k)\lambda_i}\,\Delta(e^{\lambda_1}, \dots, \widehat{e^{\lambda_i}}, \dots e^{\lambda_r}).$$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & e^{\lambda_1} & \cdots & e^{(r-2)\lambda_1} & e^{(r-1-k)\lambda_1} \\ - & - & - & - & \vdots \\ 1 & e^{\lambda_r} & \cdots & e^{(r-2)\lambda_r} & e^{(r-1-k)\lambda_r} \end{bmatrix}$$

__Conséquence__ $\varphi_{r-1}(f_k) = 0$ si $k \in \{0, \dots, r-2\}$

$\varphi_{r-1}(f_{r-1}) = 1$.

__Théorème__ Soit $c : K \to A$ une transformation de Chern définie sur une catégorie $\mathcal{C}$. On suppose que $f : X \to Y$ est une projection élémentaire dans $\mathcal{C}$ et que $u \in K(Y)_+$ est un élément tel que $\begin{cases} A(X) \\ K(X) \end{cases}$ soit canoniquement isomorphe à $\begin{cases} A(Y)_u \\ K(Y)_u \end{cases}$. Alors f satisfait à la propriété de Riemann-Roch relativement à $\tau = Td(\theta u^\vee)$, où θ est l'image canonique dans $K(Y)_u$ de l'indéterminée de l'anneau des polynômes à coefficients dans $K(Y)$.

__Démonstration__ On a vu que f_A correspondant à $p_u : A(Y)_u \longrightarrow A(Y)$ qui envoie ξ^i en $\begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{0, \dots, r-2\} \\ 1 & i = r-1 \end{cases}$ où $r = \varepsilon(u)$

où $\xi = c_1(\theta)$. On cherche à établir que le diagramme

$$\begin{tikzcd} K(Y)_u \arrow[r, "ch(\cdot)\cdot\tau"] \arrow[d, "\pi_u"'] & A(Y)_u \arrow[d, "p_u"] \\ K(Y) \arrow[r, "ch(\cdot)"'] & A(Y) \end{tikzcd}$$

Comme $K(Y)_u$ est engendré comme $K(Y)$-module par $1, \theta^{-1}, \dots, \theta^{1-r}$, il suffit de vérifier que (par linéarité)

$$ch(\pi_u(\theta^{-k})) = p_u\left(Td(\theta u^\vee)\, ch(\theta^{-k})\right)$$

On a $ch(\pi_u(\theta^{-k})) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \in \{1, \dots, r-1\} \end{cases}$

$$ch(\theta^{-k}) = e^{-k c_1(\theta)} = e^{-k\xi}$$

Quitte à augmenter les λ-anneaux on peut supposer que u se scinde dans une extension $\tilde{K}$ de $K(Y)$ comme $u = l_1 + \dots + l_r$.

On a $\theta u^\vee = \theta l_1^\vee + \dots + \theta l_r^\vee$ dans $\tilde{K}_u$.

$$\leadsto Td(\theta u^\vee) = \prod_{i=1}^{r} Td(\theta \cdot l_i^\vee) = \prod_{i=1}^{r} \frac{(c_1(\theta) - c_1(l_i))\, e^{c_1(\theta) - c_1(l_i)}}{e^{c_1(\theta) - c_1(l_i)} - 1} \quad \text{dans } \tilde{A}_u$$

pour une extension $\tilde{A}$ de $A(Y)$ qui contient les $c_1(l_i)$

Rappelons que $\tilde{A}_\mu \cong \tilde{A}[T]/(F)$

où
$$F(T) = (T - c_1(l_1)) \cdots (T - c_1(l_r)).$$

D'après le lemme, il existe un polynôme de degré $\leq r-1$ à coefficients dans $\tilde{A}$ tel que
$$Td(\theta u^\vee)\, ch(\theta^{-k}) = g_k(\xi).$$

et chaque coefficient de g_k est un polynôme symétrique en $c_1(l_1), \dots, c_1(l_r)$ (par la remarque du lemme) $\rightsquigarrow g_k \in A[T]$.

et le coefficient de T^{r-1} dans g_k est égale à $\begin{matrix} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \in \{1, \dots, r-1\} \end{matrix}$.

$$\rightsquigarrow P_\mu(g_k(\xi)) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \in \{1, \dots, r-1\} \end{cases}$$

le théorème est donc démontré $\#$.

__Application géométrique__.

① Soient X un schéma (noethérien) régulier, connexe et quasi-projectif, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, $\pi : P := \mathbb{P}(E) \to X$ la projection.

alors π vérifie la propriété de Riemann-Roch relativement à
$$Td(\mathcal{O}_E(1) \otimes \pi^* E^\vee).$$

__Remarque__. On a une suite exacte
$$0 \to \Omega^1_{P/X} \to \pi^* E \otimes \mathcal{O}_E(-1) \to \mathcal{O}_P \to 0.$$

d'où $$Td(\pi^* E^\vee \otimes \mathcal{O}_E(1)) = Td((\Omega^1_{P/X})^\vee) = Td(T_\pi)$$
tangent relatif.

② Soient $f : Y \to X$ un morphisme régulier entre des schémas réguliers connexes et quasi-projectif, qui se décompose comme
$$Y \xrightarrow{i} \mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$$
immersion régulière — projection avec E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini

alors la classe $Td(T_f) := Td([i^* T_\pi]) \cdot Td(C^\vee_{Y/\mathbb{P}(E)})^{-1}$.

est le terme de correction figurant dans le théorème de Riemann-Roch pour le morphisme f.

Faisceau des différentielles

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Alors $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ est toujours une immersion. Soit U un sous-schéma ouvert de $X \times_Y X$ contenant l'image de Δ_f tel que $\Delta_f : X \to U$ soit une immersion fermée. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_U$ qui définit l'immersion fermée $X \to U$. On désigne par $\Omega^1_{X/Y} := \Delta_f^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ appelé le faisceau des différentielles relatives

Propriétés universelles

On désigne par $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, -)$ le foncteur de $\mathcal{O}coh(X) \to \mathrm{Ens}$ qui envoie M en l'ensemble de dérivations $\mathcal{O}_Y$-linéaires de $\mathcal{O}_X$ dans M. alors ce foncteur est représenté par $\Omega^1_{X/Y}$.

(autrement dit, on a $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, M) \underset{\text{canoniqu}^t}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, M)$.

Deux suites exactes

① Si $X \xrightarrow{g} X'$ est un morphisme de Y-schémas
on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & X' \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$$g^*\Omega^1_{X'/Y} \to \Omega^1_{X/Y} \to \Omega^1_{X/X'} \to 0.$$

② Si $X \xrightarrow{i} X'$ est une Y-immersion. si $\mathcal{J}$ est l'idéal de X dans un sous-schéma ouvert U de X' (tel que $X \to U$ est une immersion fermée) alors on a une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules

$$(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)_{|X} \to i^*\Omega^1_{X'/Y} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0.$$

Morphisme lisse

Soit f: ~~$X \to$~~ Y un morphisme de schémas. On dit ~~que f est lisse~~ ~~en~~ $x \in X$ de dimension relative ~~d s'il~~ existe un ~~voisinage ouvert~~ U de x et une Y-~~immersion~~ $i : U \to \mathbb{A}^n_Y$ ~~telle~~ que

(1) ~~Localement~~ en $i(x)$, le ~~faisceau~~ d'idéaux de $i(U)$ est ~~engendré~~ par $n-d$ sections de $\mathbb{A}^n_Y$ $(s_1, \dots, s_{n-d}) =: \underline{s}$

Théorème

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas qui est localement de présentation finie, $x \in X$ et $y = f(x)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) $\Omega^1_{X/Y}(x) := j_x^* \Omega^1_{X/Y} = 0$ où $j_x : \mathrm{Spec}\, \kappa(x) \to X$

(2) il existe un voisinage ouvert U de x tel que le morphisme diagonale $\Delta_U : U \to U \times_Y U$ soit une immersion ouverte

(3) Pour tout anneau local C tout idéal I de carré nul de C et tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dotted] & C/I \\ \mathcal{O}_y \arrow[u, "f_x"] \arrow[r, "\varphi"'] & C \arrow[u, "\pi"', "\text{projection}"] \end{tikzcd}$$

où φ et ψ sont des morphismes locaux. Il existe au plus un morphisme $\eta : \mathcal{O}_x \to C$ tel que $\eta f_x = \varphi$ et $\pi\eta = \psi$.

Démonstration

La situation étant affine, on peut supposer X et Y affine d'anneaux B et A respectivt. Par Nakayama $\Omega^1_{X/Y}(x) = 0 \iff \Omega^1_{X/Y,x} = 0$.
$\iff \exists$ ouvert U contenant x tel que $\Omega^1_{X/Y|U} = 0$.
ici on utilise la condition de présentation finie.

(1) ⟹ (2)
Quitte à remplacer X par U on peut supposer $\Omega^1_{X/Y} = 0$
$\Rightarrow \Delta f$ est une immersion ouvert (par Nakayama).

(2) ⟹ (3). Supposons que η et η' sont deux homomorphisme qui vérifient les propriétés. on a

$$\mathrm{Spec}\, C \underset{\mathrm{Spec}\,\eta'}{\overset{\mathrm{Spec}\,\eta}{\rightrightarrows}} \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_x$$

Choisissant un voisinage ouvert U de x tel que $\Delta_U : U \to U \times_Y U$ soit une immersion ouvert. Soit

$$\mathrm{Spec}\, C \longrightarrow U \times_Y U \quad \text{induit par } \eta \text{ et } \eta'$$

L'image de ce morphisme est dans U (ensemblistiqut) car $\mathrm{Spec}\, C/I \cong \mathrm{Spec}\, C$
comme esp. top.

Comme $U \longrightarrow U \times_Y U$ est une immersion ouverte $\Rightarrow$ ce morphisme se factorise par Δ_U $\rightsquigarrow$ $\eta = \eta'$

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit C l'anneau local en x du premier voisinage $X^{(1)}$ de X dans $X \times_Y X$. On a $C = \mathcal{O}_x \oplus (\Omega_{X/Y})_x$ (avec $(\Omega_{X/Y})_x = I$ un idéal nilpotent). On a $C/I = \mathcal{O}_x$. On pose

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x \arrow[r, "id"] & C/I \\ \mathcal{O}_y \arrow[u, "f_x"] \arrow[r, "\psi"'] & C \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

où ψ est l'application canonique. On a deux projections $p_1, p_2 : X^{(1)} \to X$ correspondant à $\eta_1, \eta_2 : \mathcal{O}_x \to C$ $\rightsquigarrow$ $p_1 = p_2$

Comme $(\Omega_{X/Y})_x$ est engendré par les éléments de la forme $\eta_1(\xi) - \eta_2(\xi) =: d(\xi)$ $(\xi \in \mathcal{O}_x)$. $\rightsquigarrow$ $(\Omega^1_{X/Y})_x = 0$.

__Définition__ Soient $f : X \to Y$ un morphisme de schémas et $x \in X$. On dit que f est non-ramifié en x si f est localement de présentation finie en x et $\Omega^1_{X/Y}(x) = 0$. Si de plus f est plat, on dit que f est étale en x.

__Proposition__ Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des morphismes de schémas $x \in X$. Si f est étale en x alors l'application canonique $f^*(\Omega^1_{Y/Z})_x \longrightarrow (\Omega^1_{X/Z})_x$ est bijective.

__Démonstration__ Sans perte de généralité, on peut supposer f étale. Considérons

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & X \times_Z X \arrow[r] & Y \times_Z Y \\ & X \times_Y X \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\square"] & Y \arrow[u, "\Delta_{Y/Z}"'] \end{tikzcd}$$