Diviseurs de Cartier

Soit A un anneau. $S = \{\text{non-diviseurs de zéro}\}$.

S est une partie multiplicative.

$S^{-1}A$ est appelé l'anneau total des fractions de A.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace annelé. On désigne par $\mathcal{S}_X$ le faisceau $\mathcal{U} \longmapsto \{ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \text{l'homothétie } s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U \text{ est injective} \}$

Soit $\mathcal{M}_X$ le faisceau d'anneaux associé au préfaisceau

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{S}_X(\mathcal{U})^{-1} \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$$

appelé le faisceau des fonctions méromorphes sur X.

Remarque ① $\mathcal{S}_X(\mathcal{U}) \subset \{\text{non-diviseurs de zéro de } \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)\}$ mais l'inclusion est stricte en général.

② Si $X = \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine, alors

$$\mathcal{S}_X(X) = \{\text{non-diviseurs de zéro de } A\}$$

En effet. $A \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{p}}$ est fidèlement plat

Soit $\mathcal{O}_X^\times$ le faisceau de groupes abéliens.

$$U \longmapsto \{ s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid \text{l'homothétie } s : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U \text{ est un isomorphisme} \}$$

On définit $\mathcal{M}_X^\times$ de façon similaire.

Soit $\mathcal{M}_X^\times / \mathcal{O}_X^\times =: \underline{\mathrm{Div}}_X$

$\mathrm{Div}(X) := \Gamma(X, \underline{\mathrm{Div}}_X)$. Un élément dans $\mathrm{Div}(X)$ est appelé un diviseur de Cartier sur X.

On a une suite exacte $1 \to \mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{M}_X^\times \to \underline{\mathrm{Div}}_X \to 0$

$$1 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) \to \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times) \to \mathrm{Div}(X) \to \underbrace{H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)}_{\text{groupe de Picard}} \to H^1(X, \mathcal{M}_X^\times)$$

Rappel : Cohomologie de Čech

Soient X un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau en groupes abéliens. Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X, on note, $\forall p \geq 0$

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0, \dots, i_p}) \quad \text{où } U_{i_0, \dots, i_p} = \bigcap_{j=0}^{p} U_{i_j}$$

$$C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times) = \prod_{j,i\in I} \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j)$$

un cocycle dans $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ est de la forme $(\theta_{ij})_{i,j\in I}$ où θ_{ij} est un isomorphisme $\mathcal{O}_{U_i\cap U_j} \to \mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$ qui vérifie la condition suivante : $\forall\, i, j, k \in I$

$$\theta_{ij}\, \theta_{jk}\, \theta_{ik}^{-1} = 1 \quad \text{sur } \mathcal{O}_{U_i\cap U_j\cap U_k}$$

(En particulier $\theta_{ii} = 1$ et $\theta_{ij}\theta_{ji} = 1$).

On peut construire par recollement un $\mathcal{O}_X$-module inversible.

Réciproq^t. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible et $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X tel que $L_{|U_i}$ se trivialise pour tout i, alors les transitions définissent un cocycle modulo les cocycles provenant de $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$. On obtient donc $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \cong \mathrm{Pic}(X)$.

La suite exacte $(*)$ induit un homomorphisme injectif

$$Cl(X) := \mathrm{Div}(X) / \mathrm{Im}(\Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times)) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

C'est un isomorphisme lorsque $H^1(X, \mathcal{M}_X^\times) = 0$. $\qquad D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$

(par exemple. X est un schéma réduit à un nombre fini de composantes irréductibles).

$\mathrm{div} : \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$

Image de div : diviseurs principaux.

Si D_1 et D_2 ont la même image dans $Cl(X)$, on dit que D_1 et D_2 sont linéairement équivalentes.

<u>Diviseur effectif</u> $\quad \mathcal{D}iv_X^+ := \mathcal{S}_X / \mathcal{O}_X^\times$.

$\mathrm{Div}^+(X) := \Gamma(X, \mathcal{D}iv_X^+)$. c'est un sous-monoïde de $\mathrm{Div}(X)$.

Si D est un diviseur effectif, le dual son image dans $\mathrm{Pic}(X)$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$:

Localement sur un petit ouvert U, D est défini par une section $f \in \mathcal{S}_X(U)$. On peut recoller les images de ces sections.

⇝ Si D est effectif, alors $\mathcal{O}_X(D)$ admet une section globale non identiqu^t nulle.

Réciproqu^t, si X est intègre et D est un diviseur de Cartier tel que $\mathcal{O}_X(D)$ admette une section globale non-nulle, alors D est linéair^t équivalent à un diviseur effectif.

Si X est intègre de point générique η. alors $\mathcal{M}_X$ est le faisceau constant défini par le corps $\mathcal{O}_{X,\eta}$: $\forall$ ouvert affine non-vide U de X, l'anneau totale des fractions de $\mathcal{O}_X(U)$ s'identifie à $\mathcal{O}_{X,\eta}$.

<u>Cycles</u> Soit X un schéma noethérien.

Si $k \in \mathbb{N}$, on appelle cycle premier de codimension k de X tout sous-schéma intègre V de X qui est de codimension k (l'anneau local de X en point générique de V est de dimension k).

On désigne par $X^{(k)}$ l'ensemble des cycles premiers de codimension k de X et $Z^k(X)$ le groupe abélien libre engendré par $X^{(k)}$.

Tout élément de $Z^k(X)$ est appelé un cycle de codimension k dans X.

<u>Longueur d'un module</u> Soient A un anneau et M un A-modules

On appelle suite de composition de M toute chaîne de sous-A-mod de M de la forme

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

où chaque sous-quotient M_i/M_{i-1} est isomorphe à un A-module de la forme $A/\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.

<u>Proposition</u> (Jordan-Hölder) Si A est noethérien et M est de type fini, alors M admet une suite de composition.

<u>Démonstrati-</u> Soit $\mathcal{H}$ la famille de sous-modules de M ayant des suites de composition. $\mathcal{H} \neq \emptyset$ car $\{0\} \in \mathcal{H}$.

Comme M est noethérien, Θ admet un élément maximal N.

Soit $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = N$ une suite de composition de N.

Si $N \neq M$, alors M/N est non-nul. donc il a un premier associé.

<u>Lemme</u> Si A est un anneau noethérien et M est un A-module non-nul, alors M a un idéal premier associé.

(il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ et $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \{a \in A \mid ax = 0\}$)

<u>Preuve</u> Soit $y \in M \setminus \{0\}$ tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(y)$ soit maximal dans la famille des idéaux de la forme $\mathrm{ann}(x)$ avec $x \in M \setminus \{0\}$.

Si a, b sont dans A tels que $ab \in \mathfrak{p}$. on a $(ab)y = 0$.

Si $by = 0$, alors $b \in \mathfrak{p}$. sinon $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(y) \subset \mathrm{ann}(by)$

Comme $\mathfrak{p}$ est maximal. on a $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(by)$ et $a \in \mathfrak{p}$. ✻

Il existe alors un sous-A-module M' de M tel que M'/N soit isomorphe à $A/\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier. Donc

$$0 = N_0 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n \subsetneq M'$$

est une suite de composition de M'. cela contredit le fait que N est maximal. $\leadsto N = M$

<u>Définition</u> Soient A un anneau ~~c~~ et M un A-module. On dit que M est un A-module simple s'il n'a pas de sous-A-module différent de 0 et de lui-même. ($\Leftrightarrow$ dans le cas où $M \neq 0$ il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $M \cong A/\mathfrak{m}$)

On dit que M est de longueur finie s'il existe une suite de composition dont chaque sous-quotient est un A-module simple.

On désigne par $l(M)$ la plus petite longueur des suites de composition de M qui vérifie cette propriété

(Si $x \in M$. alors $Ax \cong A/\mathrm{ann}(x)$. $\Rightarrow$ Si M est simple $M \neq 0$ alors $\mathrm{ann}(x)$ est un idéal maximal pour tout x non-nul dans M)

<u>Proposition</u> Soient A un anneau et $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de A-modules. Si M est un A-modules de longueur finie, alors il en est de même de M' et M''. De plus, on a
$$\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'').$$

<u>Preuve</u> Soit $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M$ une suite de composition de M dont les sous-quotients sont simples.

$\forall i \in \{0, \ldots, k\}$, soient $M_i' = M_i \cap M'$ et M_i'' l'image de M_i dans M''.

$\forall i \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a une suite exacte
$$0 \to M_{i+1}'/M_i' \xrightarrow{f_i} M_{i+1}/M_i \xrightarrow{g_i} M_{i+1}''/M_i'' \to 0$$
Comme M_{i+1}/M_i est simple, ou bien f_i est un iso ou bien g_i est un iso. Donc on obtient des suites de compositions de M' et M'' respectivement dont les sous-quotients sont simples.

$\rightsquigarrow \ell(M) \geq \ell(M') + \ell(M'')$.

<u>Réciproquement</u>, si $0 = M_0' \subsetneq M_1' \subsetneq \cdots \subsetneq M_n' = M'$ et $0 = M_0'' \subsetneq M_1'' \subsetneq \cdots \subsetneq M_m'' = M''$ sont deux suites de composition à sous-quotients simples.

Pour $i \in \{0, \ldots, m\}$, soit M_{n+i}' l'image réciproque de M_i'' dans M.

On a $M_{n+i+1}'/M_{n+i}' \cong M_{i+1}''/M_i''$.

$\rightsquigarrow 0 = M_0' \subsetneq M_1' \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n+m}' = M$ est une suite de composition de M à sous-quotients simples. $\rightsquigarrow \ell(M) \leq \ell(M') + \ell(M'')$.

<u>Corollaire</u> Si A est un anneau et si M est un A-module de longueur finie, alors toute suite de composition à sous-quotients simples de M a la même longueur $\ell(M)$. En outre, toute suite strictement croissante / décroissante de sous-A-module de M se prolonge en une ~~suite~~ suite de composition à sous-quotients simples

$\rightsquigarrow M$ est un A-module noethérien et artinien.

<u>Proposition</u> Soient A un anneau noethérien et M un A-module de type fini. Les conditions sont équivalentes

1) M est de longueur finie
2) M est un A-module artinien
3) les idéaux premiers associés à M sont maximaux
4) les idéaux premiers dans $\mathrm{supp}(M)$ sont maximaux.

<u>Démonstration</u> 1) ⟹ 2) déjà vu

2) ⟹ 3) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé à M. Comme M est artinien, il en est de même de ses sous-modules. On peut donc supposer $M = A/\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}$ n'est pas maximal, il existe $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que la classe de a dans $A/\mathfrak{p}$ ne soit pas inversible.
On a $M \supsetneq aM \supsetneq a^2 M \supsetneq \cdots$ contradiction !

3) ⟹ 4). <u>Lemme</u> Tout idéal dans $\mathrm{supp}(M)$ contient un idéal premier associé de M (pourvu que A est noethérien).

<u>Preuve</u> Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ (i.e. $M_\mathfrak{p} \neq \{0\}$).
Comme $A_\mathfrak{p}$ est noethérien, $\mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \neq \emptyset$.
La bijection $\mathfrak{q} \longmapsto \mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ entre l'ensemble (H) des idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{p}$ et celui des idéaux premiers de $A_\mathfrak{p}$ donne une bijection entre $(H) \cap \mathrm{Ass}_A(M)$ et $\mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$.

⇝ $(H) \cap \mathrm{Ass}_A(M) \neq \emptyset$ et il existe un idéal premier associé à M qui est contenu dans $\mathfrak{p}$. ✗

tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ contient un idéal premier associé, qui est maximal, donc $\mathfrak{p}$ est aussi maximal.

4) ⟹ 1). Soit $0 \neq M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ une suite de composition.
Si $M_{i+1}/M_i \cong A/\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p}$ premier, alors $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$
⟹ $\mathfrak{p}$ est maximal et M_{i+1}/M_i est simple.

<u>Exercice</u> Soient A un anneau et M un A-module.
Montrer que, si M est noethérien et artinien, alors il est de longueur finie.

Soit A un anneau noethérien, intègre et de dimension 1.
Si $a \in A$, $a \neq 0$, alors tout idéal premier contenant a est maximal. D'après la proposition précédente, A/Aa est un A-mod de longueur finie. On désigne par $\mathrm{ord}_A(a)$ la longueur de A/Aa comme A-module.

<u>Proposition</u> Soit A un anneau noethérien, intègre et de dimension 1.
$\forall\, a, b \in A$ non-nuls, on a $\mathrm{ord}_A(ab) = \mathrm{ord}_A(a) + \mathrm{ord}_A(b)$.

<u>Démonstration</u> On a une suite exacte de A-modules.

$$0 \longrightarrow Ab/Aab \longrightarrow A/Aab \longrightarrow A/Ab \longrightarrow 0.$$

Donc $\underbrace{\ell(A/Aab)}_{\mathrm{ord}_A(ab)} = \underbrace{\ell(A/Ab)}_{\mathrm{ord}_A(b)} + \ell(Ab/Aab)$

Montrons que
$$A/Aa \longrightarrow Ab/Aab \quad [x] \longmapsto [bx]$$
est un isomorphisme de A-modules.

(C'est bien défini car $x \in Aa \Rightarrow bx \in Aab$).
C'est un homomorphisme surjectif. Si $x \in A$ est tel que $bx \in Aab$ alors il existe $y \in A$ tel que $bx = aby$ $\rightsquigarrow$ $x = ay \in Aa$ car A est intègre.

<u>Remarque</u> ① On peut généraliser la définition de $\mathrm{ord}_A(a)$ à la situation suivante.
A est noethérien, de dimension 1, a est un non-diviseur de zéro
la proposition reste encore vraie.

② Supposons A noethérien, intègre, de dimension 1. Soit K le corps des fractions de A. La proposition permet d'étendre le domaine de définition de $\mathrm{ord}_A(\cdot)$ en $K^\times$ en posant

$$\mathrm{ord}_A(a/b) = \mathrm{ord}_A(a) - \mathrm{ord}_A(b) \quad \text{pour } a, b \in A,\ b \neq 0.$$

$\mathrm{ord}_A(\cdot) : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ est un homomorphisme de groupes.

Soit X un schéma noethérien et intègre. Soit $R(X)$ le corps des fonct. rationnelles de X. Soit V un sous-schéma fermé intègre de X qui est de codimension 1. Soit x le point générique de V.

$\leadsto$ L'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien intègre et de dimension 1. on note $\mathrm{ord}_V(\cdot)$ la fonction $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\cdot)$ sur $R(X)^\times$ ($R(X)$ s'identifie au corps des fractions de $\mathcal{O}_{X,x}$).

Soient X un schéma noethérien, $k \geq 1$ un entier et $Y \in X^{(k-1)}$. $\forall$ sous-schéma intègre V de X dans $X^{(k)}$ qui ~~contient~~ est dans Y. on a $V \in Y^{(1)}$. $(\mathrm{codim}(V,Y) + \mathrm{codim}(Y,X) \leq \mathrm{codim}(V,X))$

Si $f \in R(Y)^\times$, on désigne par $[\mathrm{div}(f)]$ le k-cycle.

$$\sum_{\substack{V \in X^{(k)} \\ V \subset Y}} \mathrm{ord}_V(f)\,[V].$$

Soit $R^k(X)$ le sous-groupe de $Z^k(X)$ engendré par les éléments de la forme $[\mathrm{div}(f)]$, où f parcourt l'ensemble de toutes les fonction rationnelles sur les sous-schémas intègres de $X^{(k-1)}$. Soit $CH^k(X)$ le groupe quotient $Z^k(X)/R^k(X)$. Si deux k-cycles α et β définissent la même classe dans $CH^k(X)$, on dit qu'il sont rationnellement équivalentes.

<u>Exemple</u> $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. $Z^0(X) = \{n[X] \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$

$$Z^1(X) = \left\{ \sum_p n_p [p] \;\middle|\; \begin{array}{l} n_p \in \mathbb{Z} \quad (p \text{ premier}) \\ \text{touts sauf un nombre fini de } n_p \text{ sont nuls} \end{array} \right\}.$$

$$R^1(X) = \{ [\mathrm{div}(s)] \mid s \in \mathbb{Q}^\times \} = Z^1(X)$$

$$\left[\mathrm{div}\left(\prod_p p^{n_p} \right) \right] = \sum_p n_p [p]$$

$$\Rightarrow CH^1(X) = \{0\}.$$