Soient X un schéma noethérien, intègre et D un diviseur de Cartier. Localement sur un ouvert affine $\mathcal{U}$, D est défini par une fonction rationnelle $f_{D,\mathcal{U}}$. Si V est un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 dans X, ~~alo~~ dont le point générique est contenu dans $\mathcal{U}$, alors $\mathrm{ord}_V(f_{D,\mathcal{U}})$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{U}$ (car $f_{D,\mathcal{U}}$ diffère par un élément inversible dans l'anneau local en le point générique de V). On le note $\mathrm{ord}_V(D)$.

Posons

$$[D] := \sum_{V \in X^{(1)}} \mathrm{ord}_V(D)\,[V]$$

appelé le cycle associé au diviseur D.

Par définition

$$[\cdot] : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow Z^1(X)$$

est un morphisme de groupes.

Si $D = \mathrm{div}(f)$ est un diviseur principal, alors $[D]$ coïncide à $[\mathrm{div}(f)]$ (que l'on a défini dans la séance précédente).

$\rightsquigarrow$ $[\cdot]$ induit un homomorphisme de groupes

$$Cl(X) \cong \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow CH^1(X).$$

Proposition ① Supposons que X est un schéma normal (tout anneau local de X est intégralement clos), alors $[\,] : \mathrm{Div}(X) \to Z^1(X)$ est injectif (donc $[\cdot] : \mathrm{Pic}(X) \to CH^1(X)$ l'est aussi).

② Supposons que X est un schéma factoriel, alors $[\cdot] : \mathrm{Div}(X) \to Z^1(X)$ est un isomorphisme de groupes.

Lemme Soit A un anneau local noethérien, intègre de dimension 1, qui est intégralement clos. alors A est un anneau de valuation discrète. De plus

$$a \in A \setminus \{0\} \longmapsto l_A(A/Aa)$$ est la valuation correspondante.

Démonstration. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A.

On a $\mathfrak{m} \neq \{0\}$ car A est de dimension 1.

Soit $a \in \mathfrak{m}$ un élément non-nul dans $\mathfrak{m}$. C'est un non-diviseur de zéro car A est un anneau intègre. Comme A/aA a un idéal premier associé qui contient a, on obtient que $\mathfrak{m}$ est l'idéal premier associé à A/aA. Supposons $b \in A$ tel que $\mathfrak{m} = \{x \in A \mid bx \in aA\}$.
Soit K le corps des fractions de A. et $\mathfrak{q} = \{r \in K \mid r\mathfrak{m} \subset A\}$.
On a $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}\mathfrak{m} \subset A$. Donc $\mathfrak{q}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ ou $\mathfrak{q}\mathfrak{m} = A$.
Si $\mathfrak{q}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Pour tout $r \in \mathfrak{q}$ on a $r\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Donc r est entier sur A (Cayley-Hamilton) On en déduit $r \in A$ car A est intégralement clos. Comme $b/a \in \mathfrak{q}$ on obtient $b/a \in A$ et $b \in Aa$. Cela implique $\mathfrak{m} = A$. absurde.
Si $\mathfrak{q}\mathfrak{m} = A$, alors il existe $r \in \mathfrak{q}$ tel que $r\mathfrak{m} = A$ (sinon $\mathfrak{q}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ puisque A est local). Donc $\mathfrak{m} = Ar^{-1}$ est un idéal principal.
Il est ensuite classique de vérifier que A est une anneau de valuation discrète.

① Soit D un diviseur de Cartier tel que $[D] = 0$.
Localement sur un ouvert affine U d'anneau A, D est défini par un non-diviseur de zéro f, qui est inversible dans tout anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in U^{(1)}$. En particulier $f \in \bigcap_{\substack{\mathrm{codim}(\mathfrak{p})=1 \\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A}} A_{\mathfrak{p}}$.
Supposons que $f = b/a$ avec a non-inversible dans A. $b \in A$.
alors tout idéal premier associé à A/aA est de codimension 1. (la localisation en cet idéal premier est un anneau de valuation discrète)
En outre si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de codimension 1. alors l'image de b dans $(A/Aa)_{\mathfrak{p}}$ est nul car $b/a \in A_{\mathfrak{p}}$.
En particulier, $\forall \mathfrak{p}$ associé à A/Aa. l'image de b dans $(A/Aa)_{\mathfrak{p}}$ est nulle. Cela montre que $b \in Aa$ d'après le lemme suivant. Donc $f \in A^{\times}$ et $D = 0$.

<u>Lemme</u> Soient A un anneau noethérien et M un A-module. Alors l'homomorphisme canonique

$$M \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} M_{\mathfrak{p}} \text{ est injectif}$$

<u>Démonstration</u> Soit $x \in M$, $x \neq 0$. alors $\mathfrak{a} = \mathrm{ann}(x)$ est contenu dans un idéal premier associé $\mathfrak{p}$. L'image de x dans $M_{\mathfrak{p}}$ est alors non-nul. ※

② Soit Y un sous-schéma intègre fermé de $X^{(1)}$ dont l'idéal est $\mathcal{I}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal inversible, i.e. localement engendré par un seul élément (non-nul).
On se ramène au cas où X est affine d'anneau A (qui est intègre). Soit I l'idéal de A correspondant à $\mathcal{I}$.
Par définition, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $A_{\mathfrak{p}}$ est factoriel.
En particulier, A_I est factoriel et de dimension 1, donc son idéal maximal est principal. En effet, on prend α non-nul dans l'idéal maximal de A_I qui se décompose comme le produit d'élément irréductibles, l'un de ces éléments β est dans l'idéal maximal de A_I.
On a donc $\{0\} \subset \underset{\text{premier}}{(\beta)} \subset I_I \Rightarrow (\beta)$ est l'idéal maximal de A_I.

De façon similaire, on peut montrer que, pour tout idéal $\mathfrak{p}$ contenant I, $I_{\mathfrak{p}}$ est un idéal principal de $A_{\mathfrak{p}}$. Donc I est localement principal. (Soit $f = a/b$ le générateur de $I_{\mathfrak{p}}$ comme idéal de $A_{\mathfrak{p}}$ avec $a \in I$
alors $\begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & I_{\mathfrak{p}} \\ \alpha & \longmapsto & a\alpha \end{array}$ est surjectif. Donc dans un voisinage ouvert affine de $\mathfrak{p}$ on a $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & I \\ \alpha & \longmapsto & a\alpha \end{array}$ est surjectif).

<u>Remarque</u> On peut montrer que, si $\mathrm{Div}(X) \xrightarrow{[\cdot]} Z^1(X)$ est un isomorphisme, alors X est un schéma factoriel.

Image directe Pour tout schéma X et tout $x \in X$, on note $\kappa(x)$ le corps résiduel de X en x.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.

Si $x \in X$ et $y = f(x)$, on définit

$$\deg(x/y) = \begin{cases} [\kappa(x) : \kappa(y)] & \text{si } [\kappa(x) : \kappa(y)] < +\infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre des schémas noethériens. On définit

$$f_* : Z^{\cdot}(X) \longrightarrow Z^{\cdot}(Y)$$

tel que, pour tout sous-schéma fermé intègre V de X dont le point générique est x, on ait

$$f_*([V]) = \deg(x/y) \cdot [f(V)] \quad \text{où } y = f(x).$$

Attention ! f_* n'est pas nécessairement homogène.

On voit aussitôt que $(gf)_* = g_* \circ f_*$.

Lemme Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et surjectif de schémas noethériens intègres, $r \in R(X)^{\times}$. $d = [R(X) : R(Y)]$

- Si $d = +\infty$, alors $f_*([\operatorname{div}(r)]) = 0$
- Si $d < +\infty$, alors $f_*([\operatorname{div}(r)]) = [\operatorname{div}(N_{R(X)/R(Y)}(r))]$

Avant de démontrer le lemme, on étude le groupe de Chow de $\mathbb{P}^1_k$ avec k un corps de base.

$\mathbb{P}^1_k = \mathbb{A}^1_k \cup \{\infty\}$. L'ensemble des points fermés de $\mathbb{P}^1_k$ est en bijection avec celui des valuations (mod équivalence) sur $k(T)$ (le corps des fractions de $k[T]$) qui est triviale sur k mais nontriviale.

Rappel Soit P un polynôme unitaire de degré ≥ 1 qui est irréductible.

Pour tout $F \in k[T]$, on note $v_P(F) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid P^n | F\}$.

La fonction v_P est additive ($v_P(F \cdot G) = v_P(F) + v_P(G)$) et s'étend en une valuation discrète sur $k(T)$.

On définit en outre $v_\infty : k(T)^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie $F \in k[T] \setminus \{0\}$ en $-\deg(F)$.

valuation discrète sur un corps :

$v : K^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $v(xy) = v(x) + v(y)$

$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

anneau de valuation $\mathcal{O}_{K,v} := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$

idéal maximal $\mathfrak{m}_{K,v} = \{x \in K \mid v(x) > 0\} \cup \{0\}$.

<u>Valeur absolue</u> associée à une valuation de $k(T)$

On fixe un nombre réel $q > 1$ (si k est fini, on prend souvent $q = |k|$).

$\forall f \in k(T)$, on pose

$$|f|_P := q^{-v_P(f)}. \qquad |f|_\infty = q^{-v_\infty(f)}$$

<u>Remarque</u> Soit $|\cdot|$ une valeur absolue sur K dont la restriction à k est triviale. ($|a| = 1$ pour $a \in k^\times$ et $|0| = 0$). et qui n'est pas triviale sur $k(T)$. • $|\cdot|$ est nécessairement non-archimédienne

- Si $|T| \leq 1$, alors $|F| \leq 1$ pour tout $F \in k[T]$.
  et $\{F \in k[T] \mid |F| < 1\}$ est un idéal maximal de $k[T]$.
  (engendré par un polynôme unitaire irréductible P)
  $\rightsquigarrow$ $|\cdot|$ est équivalente (définit la même topologie) à $|\cdot|_P$
- Si $|T| > 1$, alors $|\cdot|$ est équivalente à $|\cdot|_\infty$.

<u>Théorème du produit</u> :

Pour tout $f \in k(T)^\times$, on a

$$\left(\prod_P |f|_P^{\deg(P)}\right) \cdot |f|_\infty = 1.$$

En effet, si F est un polynôme non-nul dans $k[T]$. F s'écrit comme $\prod_P P^{v_P(F)}$, et donc $\deg(F) = \sum_P v_P(F) \deg(P)$.

ou de façon équivalente $\underbrace{\deg(F)}_{= -v_\infty(F)} - \sum_P v_P(F) \deg(P) = 0$

Démonstration du lemme

Cas 1 : $Y = \operatorname{Spec} k$ $X = \mathbb{P}^1_k$. f est la projection canonique. $R(X) = k(T)$ $R(Y) = k$

Si $r \in R(X)^\times$, alors

$$[\operatorname{div}(r)] = \left(\sum_P v_P(r) \cdot [P]\right) + v_\infty(r) \cdot [\infty]$$

$$f_*([\operatorname{div}(r)]) = \left(\sum_P v_P(r) \cdot \deg P + v_\infty(r)\right)[Y] = 0$$

par la formule du produit.

Cas 2 f est un morphisme fini génériquement. Posons $K = R(Y)$. $L = R(X)$.

L/K est une extension finie (et surjectif). Soit V un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 dans Y, dont le point générique est y.

Soit $A = \mathcal{O}_{Y,y}$ et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Comme f est un morphisme fini, le schéma $\operatorname{Spec} A \times_Y X$ est affine, dont l'anneau B est une A-algèbre finie. En outre on a $B \otimes_A K = L$ (le point générique de X est le seul point au-dessus du point générique de Y car X est intègre

Les points fermés $(x_i)_{i \in I}$ de X au-dessus de y correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux de B $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$. Sans perte de généralité, on peut supposer $r \in B$. Dans ce cas-là $N(r) \in A$

Soit $\varphi : B \to B$ l'homothétie par r. On constate que

$$\operatorname{ord}_V(N(r)) = l_A(\operatorname{Coker} \varphi) = \sum_i [\kappa(x_i) : \kappa(y)] \operatorname{ord}_{V_i}(r)$$

où $V_i = \overline{\{x_i\}}$

En général, on a le résultat suivant :

Proposition Soient A un anneau noethérien, intègre et de dimension 1, K le corps des fractions de A, M un A-module de type fini, et $\varphi : M \to M$ un endomorphisme. Si $\det(\varphi_K) \neq 0$ alors on a

$$l_A(\operatorname{Coker} \varphi) = \operatorname{ord}_A(\det(\varphi_K)) + l_A(\operatorname{Ker} \varphi).$$

Preuve. Rappelons que $l_A(\cdot)$ peut être calculer localement.

$$l_A(N) = \sum_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(A)} l_{A_\mathfrak{m}}(N_\mathfrak{m}).$$

Soient A un anneau, M un A-module et $\varphi : M \to M$ un endomorphisme. On note
$$e_A(\varphi) = l_A(\mathrm{Coker}\,\varphi) - l_A(\mathrm{Ker}\,\varphi)$$
pourvu que $\mathrm{Coker}\,\varphi$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ sont de longueur finie.

bien défini si et seulement s'il existe une famille finie $(m_i)_{i=1}^n$ d'idéaux maximaux tels que $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est un iso pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A \setminus \{m_i\}_{i=1}^n$

- Si M est lui-même de longueur finie, alors $e_A(\varphi) = 0$
- Si $A \to B$ est un homomorphisme local d'anneaux locaux. $d = [\kappa(B) : \kappa(A)] < +\infty$, et $\varphi : M \to M$ est un endomorphisme de B-module. alors $e_B(\varphi)$ est bien défini si et seulement si $e_A(\varphi)$ l'est, de plus, on a $e_A(\varphi) = d \cdot e_B(\varphi)$
- Si
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
est un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes (non-nécessairement identique) et si deux nombres parmi $e_A(\varphi')$, $e_A(\varphi)$ et $e_A(\varphi'')$ sont bien défini, alors il en est de même du troisième, et dans ce cas-là on a $e_A(\varphi) = e_A(\varphi') + e_A(\varphi'')$.
- Si $M \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M$ sont deux endomorphismes. Si deux nombres parmi $e_A(\varphi)$ et $e_A(\psi)$ et $e_A(\psi\varphi)$ sont bien définis alors il en est de même du troisième, de plus, on a $e_A(\psi\varphi) = e_A(\varphi) + e_A(\psi)$.
- Si A est un anneau noethérien, M est un A-module libre de rang n. $\varphi \in \mathrm{End}_A(M)$ alors $e_A(\varphi)$ est bien défini si et seulement si $e_A(\det\varphi)$ l'est. de plus on a $e_A(\varphi) = e_A(\det\varphi)$. (donc simultanément bien défini)

<u>Preuve</u> Pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$, $\varphi_{\mathfrak{p}}$ est un iso si et seulement si $\det\varphi \notin \mathfrak{p}$.

① Si φ est un isomorphisme, alors $\det\varphi$ l'est aussi.
$\rightsquigarrow e_A(\varphi) = e_A(\det\varphi) = 0$.

② Si φ est triangulaire, il existe M' facteur direct non-nul invariant par φ
$\rightsquigarrow \varphi' : M' \to M'$ et $\tilde{\varphi} : M/M' \to M/M'$. on a $\det\varphi = \det\varphi' \cdot \det\tilde{\varphi}$ et φ' et $\tilde{\varphi}$ triangulaire. $\longrightarrow$ on peut raisonner par récurrence.

③ montrons le cas général. On peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$.
Par ① on peut supposer que $\det\varphi$ n'est pas un isomorphisme.
Comme $A/(\det\varphi)A$ est de longueur finie (artinien), on obtient $\dim A \leq 1$.
(ici on utilise le théorème d'idéaux principaux)
Soit
$$I = \{ a \in A \mid \exists k \in \mathbb{N},\ (\det\varphi)^k a = 0 \}.$$
IM est stable par l'action de φ et est un A-module de longueur finie.
Quitte à quotienter M par IM et A par I, on peut supposer $I = 0$
(i.e. $\det\varphi$ est un non-diviseur de zéro). Soit K l'anneau total des fractions de A. Considérons $h : GL(n,K) \longrightarrow \mathbb{Z}$

donc $\mathfrak{m}$ contient un non-diviseur de zéro.

$$h(\psi) = e_A(a\psi) - e_A(\det(a\psi))$$
où a est un non-diviseur de zéro tel que $a\psi \in \mathrm{End}(M)$ (justifier que cette définition ne dépend pas du choix de a). Comme $\mathfrak{m}$ contient un non-diviseur de zéro, K est un anneau de dimension 0 (artinien), donc un produit fini d'anneaux locaux artiniens. Une matrice dans $GL(n,K)$ est un produit fini de matrices inversibles à coefficients dans A et de matrices triangulées. Donc h est identiquement nulle.

Revenons vers la preuve de la prop.

D'abord $\mathrm{ann}(M_{tor}) \neq 0$, donc M_{tor} est un A-module de longueur finie. $\longrightarrow$ on peut se ramené au cas où M est sans torsion ($M \longrightarrow M \otimes_A K$ est injectif). Prenons $F \subset M$ sous-A-module libre tel que $M \otimes_A K = F \otimes_A K$ et $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $a\varphi(F) \subset F$.
Comme $(M/F) \otimes_A K = 0$, M/F est de torsion, donc de longueur finie.
$\longrightarrow$ on se ramène au cas où $M = F$. Le résultat provient alors de l'énoncé comme ci-dessus et les égalités
$$e_A(a\varphi) = e_A(\underset{\substack{\cap \\ a : M \to M}}{a}) + e_A(\varphi) = \mathrm{ord}_A(a^n) + e_A(\varphi)$$
et $$\mathrm{ord}_A(\det(a\varphi)_K) = \mathrm{ord}_A(a^n) + \mathrm{ord}_A(\det(\varphi)_K).$$