Lemme Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre et surjectif de schémas noethériens et intègres, $r \in R(X)^\times$ et $d = [R(X) : R(Y)]$.

Si $d = +\infty$ alors $f_*([\mathrm{div}(r)]) = 0$

Si $d < +\infty$ alors $f_*([\mathrm{div}(r)]) = [\mathrm{div}\, N(r)]$.

<u>Reste à démontrer le cas où $d = +\infty$</u> ($\dim X > \dim Y$).

On peut supposer que $\dim X = \dim Y + 1$.

Soit $K = R(Y)$.

$$f_*[\mathrm{div}(r)] = \sum_{\substack{V \in X^{(1)} \\ f(V) = Y}} \mathrm{ord}_V(r)\,[R(V) : K]$$

Quitte à remplacer Y par $\mathrm{Spec}\, K$ et X par X_K on peut supposer que X soit une courbe sur $\mathrm{Spec}\, K$.

Soit $h : \tilde{X} \to X$ la normalisation de X (qui est un morphisme fini) et un morphisme fini $g : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1_K$. On a $R(X) = R(\tilde{X})$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^1_K \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{Spec}\, K \end{array}$$

On a $f_*[\mathrm{div}(r)] = f_* h_* [\mathrm{div}(r)] = \pi_* g_* [\mathrm{div}(r)]$

$= \pi_* [\mathrm{div} N(r)] = 0$. ✱

Définition Si X est un schéma propre sur $\mathrm{Spec}\, k$ où k est un corps, on définit une fonction

$$\deg : Z^\cdot(X) \longrightarrow Z^\cdot(\mathrm{Spec}\, k) \cong \mathbb{Z}$$

comme π_* où $\pi : X \to \mathrm{Spec}\, k$ est le morphisme structurelle.

Définition Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre et surjectif alors $f_* : Z^\cdot(X) \longrightarrow Z^\cdot(Y)$ induit un homomorphisme de groupes induit un homomorphisme $f_* : CH^\cdot(X) \longrightarrow CH^\cdot(Y)$.

Application Soit C une courbe intègre propre sur $\mathrm{Spec}\, k$ (où k est un corps). Tout $\mathcal{O}_C$-module inversible L correspond à une classe de diviseur de Cartier dont la classe de cycle correspondante est notée comme $c_1(L) \cap [C]$ (où en abrégé comme $c_1(L)$).

On définit
$$\deg(L) := \deg(c_1(L) \cap [C])$$
La fonction deg est additive : $\deg(L \otimes L') = \deg(L) + \deg(L')$.

En général, si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, alors on définit $\deg(E) := \deg(\Lambda^{\mathrm{rg} E} E) = \deg(\det E)$

" on a $c_1(E) = c_1(\det E)$ " (si C est régulière)

Le théorème de Riemann-Roch prédit qu'il existe un $\mathcal{O}_C$-module inversible ω_C tel que, $\forall$ $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, on ait
$$h^0(C, E) - h^1(C, E) = \deg(E) - \frac{\mathrm{rk}(E)}{2} \deg(\omega_C).$$
#

Corps de fonction : Extension finie de $k(T)$.

Corps de nombres : ———————— $\mathbb{Q}$.

Cette méthode ne fonctionne pas dans le cas arithmétique :

$\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ similaire à $\mathrm{Spec}\, k[T]$.

Cependant $\mathrm{Spec}\, k[T]$ a une compactification $\mathbb{P}^1_k$

tandis que $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$ n'a aucune compactification !

$K = R(C)$

Méthode fonctionnelle pour la théorie d'intersection sur une courbe arith

Cas géométrique Soit C une courbe régulière propre sur $\mathrm{Spec}\, k$.

Si x est un point fermé de C, alors $\mathcal{O}_{C,x}$ est un anneau de valuation discrète. Choisissant $q > 1$. On définit

$\rightsquigarrow$ valuation v_x
$$|\cdot|_x : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$a \longmapsto q^{-v_x(a)}$$

formule du produit :

$$\forall\, a \in K^{\times}, \quad \sum_{x \in C^{(1)}} [k(x):k] \log_b |a|_x = 0 .$$

Si L est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang 1, alors L_K est un espace vectoriel de rang 1 sur K.
La structure de $\mathcal{O}_C$-module induit, pour chaque $x \in C^{(1)}$, une norme $\|\cdot\|_x$ sur L_K :

$$\forall\, s \in L_K, \quad \|s\|_x := \inf \{ |a|_x \mid a \in K^{\times}, \ a^{-1}s \in L \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_{C,x} \}$$

<u>Proposition</u> On a

$$\deg(L) = - \sum_{x \in C^{(1)}} [k(x):k] \log_b \|s\|_x$$

pour tout élément non-nul $s \in L_K$.

<u>Démonstration</u> Localement sur un ouvert affine U où L se trivialise par une section s_0, on a

$$\|s\|_x = |s/s_0|_x \quad \text{pour tout } x \in U.$$

#

<u>Remarque</u> La définition ne dépend pas du choix de section rationnelle non-nulle s. (On peut aussi justifier cela via la formule du produit).

<u>En général</u>, Si E est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre de rang fini, alors

$$\deg(E) = - \sum_{x \in C^{(1)}} [k(x):k] \log_b \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_x$$

où $(s_1, \ldots, s_r)$ est une base de E_K.

<u>Corps de nombres</u>.

K = une extension finie de $\mathbb{Q}$.
courbe sous-jacente : $\mathcal{O}_K$ = fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K.
Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. $\rightsquigarrow v_{\mathfrak{p}}(\cdot) \rightsquigarrow |\cdot|_{\mathfrak{p}} = p^{-v_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$ p la caractéristique de $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$ (corps résiduel)

la formule du produit naïve n'est pas vrai pour $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$.
mais on peut "compléter" $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ par des places infinies.

Dans le cas de $\mathbb{Q}$.

$|\cdot|_p$ valeur absolue p-adique $\quad |a|_p = p^{-v_p(a)}$

$|\cdot|_\infty$ valeur absolue usuelle

Théorème $\forall a \in \mathbb{Q}^\times$, on a

$$\left(\prod_p |a|_p\right) \cdot |a|_\infty = 1$$

(ou $\displaystyle\sum_p \log|a|_p + \log|a|_\infty = 0$.)

Preuve Si $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, alors $a = \pm \prod_p p^{v_p(a)}$

$$|a|_p = p^{-v_p(a)} \quad \text{et} \quad |a|_\infty = \prod_p p^{v_p(a)}$$

Le cas d'un corps de nombre général

place infini : une valeur absolue sur K qui prolonge $|\cdot|_\infty$ sur $\mathbb{Q}$

Théorème (Ostrowski) Si F est un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ archimédienne, alors F est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En outre, $|\cdot|$ est équivalente à la valeur absolue usuelle.

Démonstration ① $|\cdot|$ est archimédienne

Le sous-corps premier $\overset{\text{def}}{\text{est}}$ $\mathbb{Q}$. En effet,

Si $\mathrm{car}(F) = p$, alors pour tout $(x, y) \in F^2$, $x+y \neq 0$ et $n \geq 1$, on a

$$|(x+y)^{p^n}| = |x^{p^n} + y^{p^n}| \leq |x|^{p^n} + |y|^{p^n}$$

$$\rightsquigarrow |x+y| \leq \left(|x|^{p^n} + |y|^{p^n}\right)^{p^{-n}} \longrightarrow \max(|x|, |y|) \quad (n \to +\infty)$$

② La restriction de $|\cdot|$ à $\mathbb{Q}$ est équivalente à $|\cdot|_\infty$

Montrons qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que $|n| > 1$. Sinon

$\forall (x, y) \in F^2$, on a

$$|(x+y)^n| \leq \sum_{i=0}^{n} |x^i y^{n-i}| \leq (n+1) \max(|x|, |y|)^n$$

$\rightsquigarrow |x+y| \leq \max(|x|, |y|)$. Cela montre que $|n| > 1$ pour n assez grand fixons $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$ ~~tel que $|m| > 1$~~. Soit $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$

pour tout $k > 0$. $k \in \mathbb{Z}$, il existe $(a_i)_{0 \leq i \leq l}$ dans $\mathbb{N}$. $a_l > 0$ et $0 \leq a_i \leq n-1$ pour tout i. tels que

$$m^k = \sum_{i=0}^{l} a_i n^i \qquad \left(\text{on a } l = \left\lfloor \frac{k \log m}{\log n} \right\rfloor\right)$$

Donc $$|m|^k \leq \sum_{i=0}^{l} n |n|^i \leq \cancel{n\,|n|^l (l+1)} \quad \max(|n|^l, 1)\,(l+1)\,n$$

$$\rightarrow \quad k \log|m| \leq \log n + l \log|n| + \log(l+1)$$

$$\leq \log n + k \log m \cdot \frac{\log|n|}{\log n} + \log(l+1)$$

Si $|m| > 1$ $\Rightarrow$ $|n| > 1$.

d'où $$\frac{\log|m|}{\log m} \leq \frac{\log|n|}{\log n} + \frac{\log n}{k \log m} + \frac{\log(l+1)}{k \log m} \quad \frac{\log|n|}{\log n}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\log|m|}{\log m} \leq \frac{\log|n|}{\log n} \quad (k \to \infty) \qquad \frac{\log \max(|n|, 1)}{\log n}$$

par la symétrie, on obtient que $\frac{\log|n|}{n}$ est constante pour n assez grand.

(3) $F/\mathbb{Q}$ est une extension complète (par rapport à $|\cdot|_\infty$). Donc $F/\mathbb{R}$ est une extension. il reste à montrer que $F/\mathbb{R}$ est une extension algébrique.

Soit $\alpha \in K$. considérons la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$f(z) = |\alpha^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\,\alpha + z\bar{z}|$$

Comme $|\cdot|$ induit la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on obtient que f est une fonction continue, et $\lim_{z\bar{z} \to \infty} f(z) = +\infty$.

Donc f atteint son minimum ξ. il suffit de montrer que $\xi = 0$.

Supposons que $f(z_0) = \xi$ et $z_0 \bar{z}_0$ est maximum (parmi les $z\bar{z}$ avec $f(z) = \xi$)

Soit $\varepsilon \in]0, \xi[$. Considérons le polynôme

$$g(x) = (x^2 - (z_0 + \bar{z}_0)x + z_0\bar{z}_0)^n - (-\varepsilon)^n$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ ses racines (on compte les multiplicités). alors

$$g(x)^2 = \prod_{i=1}^{2n} (x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha_i)\,x + \alpha_i \bar{\alpha}_i). \qquad |g(\alpha)|^2 = \prod_{i=1}^{2n} f(\alpha_i).$$

On peut supposer que α_1 est une racine de

$$X^2 - (z_0+\bar{z}_0)x + \bar{z}_0 z_0 + \varepsilon$$

ainsi $\alpha_1\bar{\alpha}_1 = z_0\bar{z}_0 + \varepsilon > z_0\bar{z}_0$, donc $f(\alpha_1) > \xi$.

or $f(\alpha_1)\,\xi^{2n-1} \leq \prod_{i=1}^{2n} f(\alpha_i) = |g(\alpha)|^2 \leq (f(z_0)^n + \varepsilon^n)^2 = (\xi^n + \varepsilon^n)^2$

Donc $f(\alpha_1) \leq \xi\,(1+(\frac{\varepsilon}{\xi})^n)^2$ Comme n est arbitraire, $f(\alpha_1) \leq \xi$,

une contradiction !

<u>Proposition</u> Soient K un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|_v$.
K_v le complété de K, et $\bar{K}_v$ la clôture algébrique de K_v.
Si L/K est une extension finie, alors les extensions de $|\cdot|_v$ en L sont en bijection avec l'ensemble des plongement de L dans $\bar{K}_v$ (qui étend $K \hookrightarrow \bar{K}_v$) modulo l'action du groupes de Galois $Gal(\bar{K}_v/K_v)$.

<u>Démonstration</u> Soit $|\cdot|_w$ une valeur absolue sur L qui prolonge $|\cdot|_v$.
Soit L_w le complété de L par rapport à $|\cdot|_w$. Comme L/K est une extension finie, il en est de même de $L\cdot K_v/K_v$.
En outre, $L\cdot K_v$ est une extension finie d'un corps valué complet, donc $L\cdot K_v$ est complet, on en déduit $L_w = L\cdot K_v$ et donc L_w/K_v est fini.
Si $|\cdot|_v$ est archimédien, par le théorème d'Ostrowski, on a $K_v = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\bar{K}_v = \mathbb{C}$ donc les choix de $|\cdot|_w$ sont en bijection à l'ensemble des plongement de L dans $\mathbb{C}$ qui étend l'inclusion $K \hookrightarrow \mathbb{C} \cong \bar{K}_v$ modulo la conjugaison $Gal(\mathbb{C}/K_v)$ (conjugaison complexe lorsque $K_v = \mathbb{R}$). (Le prolongement est en fait unique dans ce cas-là).

Traitons maintenant le cas où $|\cdot|_v$ est non-archimédienne.

<u>Lemme (Hensel)</u> Soit K un corps muni d'une valeur absolue non-archimédienne $|\cdot|$ qui est complet, (R, m) son anneau de valuation, κ le corps résiduel de R. Si $f(X) = a_0X^n + \cdots + a_n \in R[X]$ est tel que $\max(|a_0|, \ldots, |a_n|) = 1$ et si $\bar{f} = f \bmod m[X]$ admet une décomposition $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$ dans $\kappa[X]$ avec $pgcd(\bar{g}, \bar{h}) = 1$, alors il existe des polynômes g et h tels que $\bar{g} = g \bmod m[X]$, $\bar{h} = h \bmod m[X]$, $f = gh$ et $\deg(g) = \deg(\bar{g})$.

Démonstration. Soient r et s des degré de $\bar{g}$ et $\bar{h}$ respectivt.
On a $r+s \leq n$. Choisissons arbitrairement des relèvements g_0 et h_0 de $\bar{g}$ et $\bar{h}$ tels que $\deg(g_0) = \deg(\bar{g})$ $\deg(h_0) = \deg(\bar{h})$.
Comme $\text{pgcd}(\bar{g}, \bar{h}) = 1$, il existe $\alpha, \beta \in R[X]$ tels que $1 \equiv \alpha g_0 + \beta h_0 \mod m[X]$.
On choisit ϖ parmi les coefficients de $f - g_0 h_0$ et $\alpha g_0 + \beta h_0 - 1$ tel que $|\varpi|$ soit maximal. On construira par récurrence deux suites de polynômes $(g_k)_{k\geq 1}$ et $(h_k)_{k\geq 1}$ tels que $g_k h_k \equiv f \mod \varpi^{k+1} R[X]$ et $g_k \equiv g_{k-1} \mod \varpi^k R[X]$
$h_k \equiv h_{k-1} \mod \varpi^k R[X]$, $\deg(g_k) = r$. $\deg(h_k) \leq n-r$.
Supposons que l'on a déjà construit g_k et h_k. Soit

$$f_k = \varpi^{-k-1}(f - g_k h_k) \in R[X]$$

alors $\quad f_k \alpha g_0 + f_k \beta h_0 - f_k \in \varpi R[X]$

Comme $\deg(g_0) = \deg(\bar{g})$ et $\bar{g} \equiv g_0 \mod m[X]$. le coefficient dominant de g_0 est un élément inversible de R. $\rightsquigarrow \exists\, \mu, \varepsilon \in R[X]$ tel que

$f_k \beta = \mu g_0 + \varepsilon$ et $\deg(\varepsilon) < r$. on a alors

$$(f_k \alpha + \mu h_0) g_0 + \varepsilon h_0 - f_k \in \varpi R[X]$$

Soit δ le morceau de $f_k \alpha + \mu h_0$ qui consiste des termes dont les coefficients sont de valeurs absolue $> |\varpi|$.
alors $\delta g_0 + \varepsilon h_0 - f_k \in \varpi R[X]$
or $\deg(\varepsilon h_0 - f_k) \leq n$. on obtient $\deg(\delta) \leq n-r$ (le coefficient dominant de g_0 est inversible)
Soient $g_{k+1} = g_k + \varpi^{k+1}\varepsilon$
$h_{k+1} = h_k + \varpi^{k+1}\delta$
On a $f - g_{k+1} h_{k+1} \in \varpi^{k+2} R[X]$.

Comme K est complet, les suites $(g_k)_{k\geq 1}$ et $(h_k)_{k\geq 1}$ convergent vers g, h respectivt.
On a $f = gh$. $\deg(g) = \deg(\bar{g})$.

*

Lemme. Soit K un corps muni d'une valeur absolue non-archimédienne $|\cdot|$, dont l'anneau de valuation $\mathcal{O}_K$ est hensélien. Pour toute extension finie L/K, la valeur absolue s'étend de façon unique sur L. De plus, $\forall\, \alpha \in L$, on a

$$|\alpha| = |N_{L/K}(\alpha)|^{1/[L:K]}$$

En outre, l'anneau de valuation de L est la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans L.

Démonstration Soit B la fermeture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans L. ① Montrons que

$$B = \{\alpha \in L, \quad N_{L/K}(\alpha) \in \mathcal{O}_K\}.$$

En effet, il est facile de voir que $B \subset \{\alpha \in L, N_{L/K}(\alpha) \in \mathcal{O}_K\}$.

Réciproquement, si $\alpha \in L$ est tel que $N_{L/K}(\alpha) \in \mathcal{O}_K$. Soit f le polynôme minimal de α. $f(X) = X^d + a_1 X^{d-1} + \dots + a_d$ avec $a_d \in \mathcal{O}_K$.

Soit $b \in \mathcal{O}_K$ tel que $\max(|b|, |ba_1|, \dots, |ba_d|) = 1$.

Soit i le plus grand indice telle que $|ba_i| = 1$. Si $i \neq 0, n$ alors $bf \bmod m[X]$ est réductible, donc bf est réductible dans $\mathcal{O}_K[X]$. contradiction. donc $\max(|b|, |ba_1|, \dots |ba_d|) = \max(|b|, |ba_d|)$ et donc $f \in \mathcal{O}_K[X]$.

② Montrons que $|\alpha| = |N_{L/K}(\alpha)|^{1/[L:K]}$ est une valeur absolue sur L.

$\forall\ \alpha, \beta \in L$ on a $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

En outre $B = \{\alpha \in L \mid |\alpha| \leq 1\}$.

Comme B est un anneau. pour tout $x \in B$, on a $x + 1 \in B$.

Si $\alpha, \beta \in L$ tels que $|\alpha| \geq |\beta|$, alors $\left|\frac{\beta}{\alpha} + 1\right| \leq 1$ donc $|\beta + \alpha| \leq |\alpha|$.

③ L'unicité de prolongement.

Si $|\cdot|_1$ est une autre prolongement. pour tout $\alpha \in B$ on a $|\alpha|_1 \leq 1$

Sinon on peut supposer $|\alpha|_1 > 2$ (quitte à remplacer α par une puissance)

Soit $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in \mathcal{O}_K[X]$ le polynôme minimal

On a

$$1 = |a_1 \alpha^{-1} + \dots + a_n \alpha^{-n}|_1 \leq |\alpha|_1^{-1} + \dots + |\alpha|_1^{-n} \leq \frac{|\alpha|_1^{-1}}{1 - |\alpha|_1^{-1}} < 1.$$

Soit B_1 l'anneau de valuation de $|\cdot|_1$. On a $B_1 \supset B$.

Soit m_1 l'idéal maximal de B_1. on a $m_1 \cap \mathcal{O}_K \neq \{0\}$. Donc $m_1 \cap B$ est l'idéal maximal de B. Donc $|x| < 1 \Rightarrow |x|_1 < 1$

$\rightarrow |\cdot|$ et $|\cdot|_1$ sont équivalente. $\Rightarrow |\cdot| = |\cdot|_1$

Exercice Soit K un corps, $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ deux valeurs absolues. les conditions sont équivalentes:

① $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ induisent la même topologie

② $|x|_1 < 1 \Rightarrow |x|_2 < 1$

③ $\exists\ s > 0$ tel que $|x|_2 = |x|_1^s$.