<u>Théorème</u> Soient K un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|_v$, K_v le complété de K. Si L/K est une extension finie et séparable, alors

$$L \otimes_K K_v \cong \bigoplus_w L_w$$

où $|\cdot|_w$ parcourt toutes les prolongement de $|\cdot|_v$ sur L.

<u>Démonstration</u> L/K est engendrée par un seul élément α

Soit f le polynôme minimal de α sur K. et

$$f(X) = f_1(X) \cdots f_r(X)$$

la décomposition de f dans $K_v[X]$ par des polynômes irréductibles. alors $f_1, \cdots f_r$ sont distincts. et

$$\bigoplus_w L_w \cong \bigoplus_{i=1}^{r} K_v[X]/(f_i(X)) \cong K_v[X]/(f(X)) \cong K_v \otimes_K L.$$

<u>Corollaire</u> Soit K un corps muni d'une valeur absolue, L/K une extension finie et séparable, alors

① $[L:K] = \sum_w [L_w : K_v]$

② $N_{L/K}(\alpha) = \prod_w N_{L_w/K_v}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in L$

③ $Tr_{L/K}(\alpha) = \sum_w Tr_{L_w/K_v}(\alpha)$ pour tout $\alpha \in L$.

où $|\cdot|_w$ parcourt toutes les extension de $|\cdot|_v$ sur L.

<u>Théorème</u> (Formule du produit)

Soit K un corps de nombres. On désigne par M_K l'ensemble des valeurs absolues qui prolonge ou bien $|\cdot|_\infty$ sur $\mathbb{Q}$ ou bien une valeur absolue p-adique. alors on a

$$\sum_{w \in M_K} [K_w : \mathbb{Q}_w] \log |a|_w = 0 \qquad \forall a \in K^\times$$

<u>Preuve</u>. pour tout $v \in M_\mathbb{Q}$, $w \in M_K$, $w|v$, on a

$$[K_w : \mathbb{Q}_v] \log |a|_w = \log |N_{L_w/\mathbb{Q}_v}(a)|_v$$

$$\rightsquigarrow \sum_{w \in M_K} [K_w : \mathbb{Q}_w] \log |a|_w = \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \sum_{w|v} \log |N_{K_w/\mathbb{Q}_v}(a)|_v = \sum_{v \in M_\mathbb{Q}} \log |N_{L/\mathbb{Q}}(a)|_v$$

<u>Fibré vectoriel hermitien</u> Soit K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K

On appelle fibré vectoriel hermitien tout $\mathcal{O}_K$-module projectif E muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \in M_{K,\infty}}$ ← valeurs absolues qui prolongent $|\cdot|_\infty$

où $\|\cdot\|_\sigma$ est une norme sur $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_\sigma$ qui est euclidienne / hermitienne suivant si $K_\sigma = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

<u>degré d'Arakelov</u>

Si $(s_1, \ldots, s_r)$ est une base de E_K sur K. on note

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := -\sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_v$$

<u>Remarque</u> ① Si v est une place finie, ($|\cdot|_v$ prolonge une place p-adique $|\cdot|_p$), donc la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur E induit une norme $\|\cdot\|_v$ ultramétrique sur $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ telle que $E \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_v}$ soit la boule unité fermée ($\mathcal{O}_{K_v}$ étant l'anneau de valuation dans K_v), qui induit ensuite une norme ultramétrique sur $\det(E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v)$ (telle que $(\Lambda^r_{\mathcal{O}_K} E) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K_v}$ soit la boule unité fermée.

② La définition de $\widehat{\deg}(\overline{E})$ ne dépend pas du choix de la base $(s_1, \cdots, s_r)$.

Soit $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \in M_{K,\infty}})$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Si $F \subset E$ est un sous-$\mathcal{O}_K$-module, alors $(F, \underbrace{(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma \in M_{K,\infty}}}_{\text{normes restreinte}})$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, appelé un sous-fibré vectoriel hermitien de $\overline{E}$

De façon similaire, si G est un quotient de E qui est un $\mathcal{O}_K$-module projectif, alors G et les normes quotientes forment un fibré vectoriel hermitien (fibré quotient).

On dit que $0 \to \overline{F} \to \overline{E} \to \overline{G} \to 0$ est une suite exacte si $0 \to F \to E \to G \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_K$-modules et si les métriques sur F (resp. G) sont des métriques induites / (resp. quotientes).

<u>Proposition</u> ① Si $\overline{L}$ et $\overline{M}$ sont deux fibrés inversibles hermitiens, alors $\widehat{\deg}(\overline{L}\otimes\overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{L}) + \widehat{\deg}(\overline{M})$.

② Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien $r = rk(E)$.
alors $\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\det(\overline{E}))$
$\Lambda^r \overline{E}$.

③ Si $0 \to \overline{F} \to \overline{E} \to \overline{G} \to 0$ est une suite exacte, alors
$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{F}) + \widehat{\deg}(\overline{G})$.

④ Si $\overline{E}$ et $\overline{E}'$ sont deux fibrés vectoriels hermitiens, alors
$$\widehat{\deg}(\overline{E}\otimes\overline{E}') = rg(E')\,\widehat{\deg}(\overline{E}) + \widehat{\deg}(\overline{E}')\,rg(E).$$

⑤ Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, F_1 et F_2 sont deux sous-module de E. alors
$$\widehat{\deg}(\overline{F_1}) + \widehat{\deg}(\overline{F_2}) \leq \widehat{\deg}(\overline{F_1\cap F_2}) + \widehat{\deg}(\overline{F_1+F_2}).$$

<u>Démonstration</u>. ① si s et t sont deux éléments non-nuls dans L_K et M_K respectivement, on a
$$\|s\otimes t\|_v = \|s\|_v \cdot \|t\|_v \quad \text{pour tout } v.$$

② par définition

③ $\det(\overline{E}) \cong \det(\overline{F}) \otimes \det(\overline{G})$ (isométrie).

④ Soient $(s_1, \dots, s_n)$ et $(t_1, \dots, t_m)$ des bases de E_K et E'_K respectivement, alors $(s_i\otimes t_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ est une base de $(E\otimes E')_K$

De plus, on a
$$\Big\| \bigwedge_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} (s_i\otimes t_j) \Big\|_v = \Big\| \bigwedge_{1\leq i\leq n} s_i \Big\|_v^m \cdot \Big\| \bigwedge_{1\leq j\leq m} t_j \Big\|_v^n .$$

⑤ On a une suite exacte
$$0 \longrightarrow F_1\cap F_2 \longrightarrow F_1\oplus F_2 \longrightarrow F_1+F_2 \longrightarrow 0$$
$$x \longmapsto (x, -x)$$
$$(x, y) \longmapsto x+y.$$

Lemme Soit V un espace euclidien (hermitien). Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels, $(\alpha_1, \dots \alpha_r)$ une base de $V_1 \cap V_2$, $(\beta_1, \dots \beta_n)$ une famille libre dans V_1 telle que $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots \beta_n)$ soit une base de V_1, $(\gamma_1, \dots \gamma_m)$ une famille dans V_2 telle que $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma_1, \dots \gamma_m)$ soit une base de V_2, alors on a

① $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots \gamma_m)$ est une base de $V_1 + V_2$

② $\|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r\| \cdot \|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m\|$

$\leqslant \|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n\| \cdot \|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m\|$.

Preuve ① C'est une famille génératrice dont le est égale au rang de $V_1 + V_2$

② Quitte à faire un changement de base, on peut supposer que

- $(\alpha_i)_{i=1}^r$ est une base orthonormée de $V_1 \cap V_2$
- $(\beta_j)_{j=1}^n \cup (\alpha_i)_{i=1}^r$ est une base orthonormée de V_1
- $(\gamma_j)_{j=1}^m \cup (\alpha_i)_{i=1}^r$ est une base orthonormée de V_2.

alors $\|\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \wedge \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_m\|$

$$\leqslant \left(\prod_{i=1}^r \|\alpha_i\|\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^n \|\beta_j\|\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^m \|\gamma_k\|\right) = 1.$$

tandis que les autres normes sont égales à 1.

Méthode de pentes

Sous-module saturé.

Soient E un $\mathcal{O}_K$-module projectif de rang fini, et V un sous-espace vectoriel de E_K. On appelle saturation de V dans E le plus grand sous-$\mathcal{O}_K$-module F de E tel que $F_K = V$ $(F = V \cap E)$. Supposons $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien

Remarque Si F' est un sous-$\mathcal{O}_K$-module de $\overline{E}$ tel que $F'_K = V$, alors $\widehat{\deg}(F') \leqslant \widehat{\deg}(E)$.

Lien avec les norme :

Si F est la saturation de V dans E, pour toute place finie $\mathfrak{p}$, la norme sur $F \otimes K_{\mathfrak{p}} \cong V \otimes K_{\mathfrak{p}}$ induit par la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur F coïncide avec la restriction de la norme de la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur E. Si F n'est pas saturé, alors la boule unité fermée est plus petite $\Rightarrow$ la norme induite par la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur F est plus grande.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ qui est non-nul, on désigne par $\hat{\mu}(\overline{E})$ le quotient $\widehat{\deg}(\overline{E})/\mathrm{rg}(E)$, appelé la pente de $\overline{E}$.

On dit que $\overline{E}$ est semi-stable si pour tout sous-fibré non-nul F, on a $\hat{\mu}(\overline{F}) \leq \hat{\mu}(\overline{E})$.

- C'est équivalente à la condition suivante : pour tout sous-fibré saturé et non-nul F, on a $\hat{\mu}(\overline{F}) \leq \hat{\mu}(\overline{E})$.

Lemme Soit V un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur un corps K. Si d est une fonction de l'ensemble (H) des sous-espaces vectoriels de V vers $\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes

① $d(\{0\}) = 0$

② pour tout sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 de V, on a

$$d(V_1 \cap V_2) + d(V_1 + V_2) \geq d(V_1) + d(V_2)$$

alors la fonction $\mu(\cdot) = d(\cdot)/\mathrm{rg}(\cdot)$ atteint son maximum sur (H) (où par convention $\mu(\{0\}) = -\infty$). De plus, il existe un sous-espace vectoriel V_{des} de V qui contient tous les sous-espaces vectoriels de V où la fonction μ prend sa valeur maximale.

Démonstration. Soit r le rang de V. On raisonne par récurrence sur r. Le problème est triviale lorsque $r = 1$. On suppose $r > 1$ dans la suite :

Si la fonction $\mu(\cdot)$ atteint son maximum à V, alors $V_{des} = V$ vérifie déjà le lemme. Dans la suite, on suppose $V' \subsetneq V$ tel que $\mu(V') > \mu(V)$ et que $rg(V')$ soit maximal. Par l'hypothèse de récurrence, la fonct. $\mu(\cdot)$ atteint son maximum sur $\Theta_{V'}$, de plus, il existe V'_{des} qui contient touts les sous-espaces où $\mu(\cdot)$ attein le maximum.

On a $\mu(V'_{des}) \geq \mu(V') > \mu(V)$

Montrons que $\mu(V'_{des}) = \max\limits_{W \subset V} \mu(W)$ et V'_{des} contient touts les W tels que $\mu(W) = \mu(V'_{des})$.

Soit $W \subset V$. si W est contenu dans V', alors on a $\mu(W) \leq \mu(V'_{des})$

Sinon on a $rg(W+V') > rg(V')$ et donc $\mu(W+V') \leq \mu(V)$ (car $rg(V')$ est maximum). On a

$$d(W+V') + d(W\cap V') \geq d(W) + d(V')$$

En outre $d(W+V') = \mu(W+V')\, rg(W+V') < rg(W+V')\, \mu(V')$

$$d(W\cap V') \leq rg(W\cap V')\, \mu(V'_{des})$$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow\ d(W) &\leq d(W+V') + d(W\cap V') - d(V') \\
&< rg(W+V')\,\mu(V') + rg(W\cap V')\,\mu(V'_{des}) - rg(V')\,\mu(V') \\
&= (rg(W+V') - rg(V'))\,\mu(V') + rg(W\cap V')\,\mu(V'_{des}) \\
&= (rg(W) - rg(W\cap V'))\,\mu(V') + \mu(V'_{des})\, rg(W\cap V') \\
&\leq rg(W) \cdot \mu(V'_{des})
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $W \in \Theta_V$ on a $\mu(W) \leq \mu(V'_{des})$, et l'inégalité est stricte lorsque $W \not\subset V'$. Donc si $\mu(W) = \mu(V'_{des})$, alors $W \subset V'_{des}$.

<u>Corollaire</u> Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec} O_K$, alors il existe un sous-O_K-module non-nul E_{des} de E qui vérifie les conditions

① $\hat{\mu}(\overline{E}_{des}) = \sup\limits_{0 \neq F \subset E} \hat{\mu}(\overline{F}) =: \hat{\mu}_{max}(\overline{E})$

② Si $0 \neq F \subset E$ est tel que $\hat{\mu}(\overline{F}) = \hat{\mu}_{max}(\overline{E})$, alors $F \subset E_{des}$.

(E_{des} est nécessairement saturé).

Soit $\bar{E}$ un fibré vectoriel hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.
On dit que $\bar{E}$ est semi-stable si $\hat{\mu}_{max}(\bar{E}) = \hat{\mu}(\bar{E})$

<u>Inégalité de pentes</u> : Comparaison de degré d'Arakelov de deux fibrés vectoriels hermitiens.

Soient $\bar{E}$ et $\bar{F}$ deux fibrés vectoriels hermitiens, et $f : E_K \to F_K$ une application continue. Pour toute place v de K, f induit une application K_v-linéaire d'espaces vectoriels normés. $f_v : E \otimes K_v \longrightarrow F \otimes K_v$.
On désigne par $\|f\|_v$ la norme d'opérateur de cette application linéaire, et $h(f) := \sum_v [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|f\|_v$.

<u>Proposition</u> Soient $\bar{L}_1$ et $\bar{L}_2$ deux fibrés inversible hermitiens, et $f : L_{1,K} \to L_{2,K}$ une application K-linéaire non-nulle. On a

$$\widehat{\deg}(\bar{L}_1) = \widehat{\deg}(\bar{L}_2) + h(f)$$

<u>Démonstration</u> Si s est un élément non-nul de $L_{1,K}$, alors on a

$$\|f\|_v = \frac{\|f(s)\|_v}{\|s\|_v} \quad \text{pour tout } v.$$

*

<u>Corollaire</u> Soient $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ deux fibré vectoriels hermitiens de même rang $f : E_{1,K} \longrightarrow E_{2,K}$ une application K-linéaire bijective, alors

$$\widehat{\deg}(\bar{E}_1) = \widehat{\deg}(\bar{E}_2) + h(\det f)$$

($\det f$ est l'application K-linéaire $\det(E_{1,K}) \longrightarrow \det(E_{2,K})$ induite par f)

<u>Lemme</u> Soient V et W deux espaces euclidens / hermitiens de même rang r, et $f : V \to W$ une application $\mathbb{R}/\mathbb{C}$-linéaire. On a

$$\|\det f\| \leq \|f\|^r$$

<u>Démonstration</u>. Soit $(x_i)_{i=1}^r$ une base orthonormée de V.
alors $\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\| = 1$. En outre

$$\|\det f\| = \|f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_r)\| \leq \prod_{i=1}^r \|f(x_i)\| \leq \|f\|^r.$$

<u>Proposition</u> Soient $\bar{E}_1$ et $\bar{E}_2$ deux fibrés vectoriels hermitiens. $f : E_{1,K} \longrightarrow E_{2,K}$ une application K-linéaire injectif. alors

$$\hat{\mu}(\bar{E}_1) \leq \hat{\mu}_{max}(\bar{E}_2) + h(f).$$

Cycle arithmétique dans une courbe arithmétique

Soit $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Soient $M_{K,f}$ et $M_{K,\infty}$ les places finies / infinies de K. On désigne par $\widehat{Z}^1(S)$ le groupe

$$Z^1(S) \times \mathbb{R}^{M_{K,\infty}}$$

Rappel : $Z^1(S)$ est le groupe abélien libre engendré par $M_{K,f}$.

Si r est un élément dans $K^\times$, le cycle arithmétique associé à r est

$$[\operatorname{div}(r)] = -\sum_{\mathfrak{p}\in M_{K,f}} v_{\mathfrak{p}}(r)[\mathfrak{p}] + \sum_{v\in M_{K,\infty}} \log|r|_v \cdot [v]$$

degré d'Arakelov d'un cycle arithmétique

$$\widehat{\deg}([\mathfrak{p}]) = \log(\underbrace{\# \mathbb{F}_{\mathfrak{p}}}_{p^{f(\mathfrak{p}/p)}}) \qquad \widehat{\deg}([v]) = [K_v : \mathbb{R}]$$

Théorie de Ramification :

Si $\mathfrak{p}$ est une place au-dessus d'un nombre premier p, alors $|\cdot|_{\mathfrak{p}} = p^{e(\mathfrak{p}/p)^{-1} v_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$

$$\Rightarrow \quad v_{\mathfrak{p}}(r) = \frac{\log|r|_{\mathfrak{p}}}{\log p} \cdot e(\mathfrak{p}/p)$$

$$\rightarrow \quad \widehat{\deg}([\operatorname{div}(r)]) = \sum_{\mathfrak{p}\in M_{K,f}} e(\mathfrak{p}/p) \cdot f(\mathfrak{p}/p) \cdot \log|r|_{\mathfrak{p}} + \sum_{v\in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{R}] \log|r|_v$$

$$= \sum_{v\in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log|r|_v = 0 \qquad \widehat{CH}^1(S) := \widehat{Z}^1(S) / \operatorname{Im}(\operatorname{div})$$

Plus généralement

Si $\overline{L}$ est un fibré inversible hermitien, $s \in L_K$, $s \neq 0$, on peut définir $\widehat{c}_1(\overline{L}) \cap [S]$ comme la classe du cycle arithmétique

$$[\operatorname{div}(s)] \quad -\sum_{\sigma\in M_{K,\infty}} \log\|s\|_\sigma \cdot [\sigma]$$

On a $\quad \widehat{\deg}(\overline{L}) = \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L}) \cap [S])$