Variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.

<u>Définition</u> Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{C}_U^\infty$ le faisceau des fonctions lisse sur U. l'espace localement annelé $(U, \mathcal{C}_U^\infty)$ est appelé une carte de dimension n.

On appelle variété différentielle de dimension n tout espace localement annelé $(M, \mathcal{C}_M^\infty)$ paracompact (tout recouvrement ouvert admet un raffinement dénombrable qui est localement fini) qui est localement isomorphe à une carte de dimension n.

Soit $(M, \mathcal{C}_M^\infty)$ une variété différentielle, on désigne par TM le faisceau des $\mathbb{R}$-dérivation de $\mathcal{C}_M^\infty$ dans $\mathcal{C}_M^\infty$.

<u>Proposition</u> TM est un $\mathcal{C}_M^\infty$-module localement libre de rang n.

<u>Preuve</u> Soit U une carte de dimension n.

On a une application naturelle $(\mathbb{R}^n)^\vee \longrightarrow C^\infty(U)$ donnée par la restriction des formes linéaires à U. Cela induit

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U)) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(U) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}^n)^\vee, C^\infty(U)) \\ \xi & \longmapsto & (\varphi \longmapsto \xi(\varphi)) \end{array}$$

Cette application est surjective car, pour tout $h \otimes g \in \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} C^\infty(U)$,

$f \in C^\infty(U) \longmapsto g\langle Df, h\rangle$ est un dérivation dont l'image est $h \otimes g$.

Montrons qu'elle est injective. On suppose que ξ est une dérivation telle que $\xi(\alpha) = 0$ pour tout forme linéaire α. Montrons que pour toute fonction $f \in C^\infty(U)$ on a $\xi(f) = 0$

Soit x_0 un élément de U. Comme f est de classe C^∞, il existe une fonction g de classe C^∞ sur U telle que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + D_{x_0}f(x - x_0) + g(x) \cdot \|x - x_0\|^2 \\ &= f(x_0) - D_{x_0}f(x_0) + \underbrace{D_{x_0}f}_{\text{forme linéaire}}(x) + g(x) \cdot \|x - x_0\|^2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\xi(f)(x_0) = 0$ car $\xi(\|x - x_0\|^2)(x_0) = 0$.

une section dans $\Gamma(M, TM)$ est appelée une champs de vecteurs.

On a un homomorphisme $d : C^\infty_M \longrightarrow TM^\vee$ ($\mathbb{R}$-linéaire) telle que $\forall$ U ouvert dans M et $f \in C^\infty(U)$ $\xi \in TM(U)$, on a

$$(df)(\xi) := \xi(f).$$

d est une dérivation ($d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df$)

Complexe de de Rham

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to C^\infty_M \xrightarrow{d} TM^\vee \xrightarrow{d} \Lambda^2 TM^\vee \longrightarrow \cdots \to \Lambda^n TM^\vee \longrightarrow 0$$

où Λ est pris sur C^∞_M.

Si U est un ouvert de M, $\alpha \in \Gamma(U, \Lambda^p(TM^\vee))$ $\beta \in \Gamma(U, \Lambda^q(TM^\vee))$

alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$.

On vérifie facilement que $d^2 = 0$.

<u>Proposition</u> Le complexe de de Rham est une résolution par des faisceaux mous

<u>cohomologie de de Rham</u>.

On note $A^p(M) := \Gamma(M, \Lambda^p TM^\vee)$. On a un complexe

$$0 \to A^0(M) \to A^1(M) \to \cdots \to A^n(M) \to 0$$

dont les groupes de cohomologie sont appelés des groupes de cohomologie de de Rham, noté comme $H^{\cdot}_{dR}(M)$

<u>Corollaire</u> $H^{\cdot}_{dR}(M) \cong H^{\cdot}(M, \underline{\mathbb{R}})$ cohomologies du faisceau $\underline{\mathbb{R}}$.

<u>Variété analytique complexe</u>

<u>carte holomorphe de dimension complexe n</u>

Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}_U$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur U, l'espace localement annelé $(U, \mathcal{O}_U)$ est appelé une carte analytique de dimension complexe n.

<u>Remarque</u> (U, C^∞_U) est une carte différentielle de dimension $2n$.

<u>Définition</u> Une variété analytique complexe de dimension complexe n est un espace localement annelé paracompact qui est localement isomorphe à une carte analytique de dimension complexe n.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est une variété analytique complexe, par recollement des faisceaux de fonctions différentielles (c.f. la remarque), on obtient un faisceau $\mathcal{C}^\infty_X$ tel que $(X, \mathcal{C}^\infty_X)$ soit une variété différentielle de dimension $2\dim_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{O}_X)$.

En outre, si $(U, \mathcal{O}_U)$ est une carte analytique, alors $TU \cong \mathcal{C}^\infty_U \otimes \mathbb{C}^n$ la conjugaison complexe sur $\mathbb{C}^n$ induit une anti-involution sur TU

$$J : TU \longrightarrow TU \qquad J^2 = -\mathrm{Id}$$

Cette construction est canonique

Par recollement, on obtient que, pour X un variété analytique complexe, on a une anti-involution J sur TX, appelée la structure complexe.

Soit $T_{\mathbb{C}}X = TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. alors J se prolonge en une anti-involution $\mathbb{C}$-linéaire sur $T_{\mathbb{C}}X$. On désigne par $T^{1,0}X$ et $T^{0,1}X$ le sous-fibré propre de J de valeur propre i et $-i$ respectivement.

(on a $\mathrm{rg}\, T^{1,0}X = \mathrm{rg}\, T^{0,1}X = n$ comme $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$-module localement libre)

De même $T_{\mathbb{C}}X^\vee$ se décompose comme $(T^{1,0}X)^\vee \oplus (T^{0,1}X)^\vee$.

et pour tout entier $d \in \{0, \dots, n\}$

$$\Lambda^d T_{\mathbb{C}}X^\vee = \bigoplus_{p+q=d} \underbrace{\Lambda^p (T^{1,0}X)^\vee \otimes \Lambda^q (T^{0,1}X)^\vee}_{\text{noté comme } \Lambda^{p,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)}$$

La dérivation $d : \mathcal{C}^\infty_X \longrightarrow TX^\vee$ induit une dérivation $\mathbb{C}$-linéaire

$$d : \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}X^\vee$$ qui se décompose encore comme

$$\partial : \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}} \longrightarrow (T^{1,0}X)^\vee \quad \text{et} \quad \bar\partial : \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}} \longrightarrow (T^{0,1}X)^\vee.$$

Ces opérateurs se prolonge en
$$\partial : \Lambda^{p,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)$$
$$\bar\partial : \Lambda^{p,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(T_{\mathbb{C}}X^\vee).$$

$d^2 = 0$ donne $\partial^2 = \bar\partial^2 = 0$

$$\partial\bar\partial + \bar\partial\partial = 0.$$

On pose $d^c = \frac{i}{4\pi}(\partial - \bar\partial)$ d'où $dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial$.

Conjugaison complexe sur $\mathbb{C}$ induit une involution

$$\Lambda^{p,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \longrightarrow \Lambda^{q,p}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)$$
$$\alpha \longmapsto \bar\alpha$$

fibré vectoriel (holomorphe) : $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini.

<u>métrique hermitien</u> Soit X une variété analytique et E un fibré vectoriel holomorphe ou C^∞ ou C^0 sur X. On appelle métrique hermitien sur E tout morphisme de faisceaux

$$h : E \times E \longrightarrow \mathcal{C}^0_X$$

qui vérifie les conditions suivantes ← faisceau des fonctions continues

(1) h est ponctuel :

si s et t sont deux sections au-dessus d'un ouvert U, $x \in U$, alors $h(s,t)(x)$ ne dépend que de $s(x)$, $t(x)$

(2) $h_x : E_x \times E_x \longrightarrow \mathbb{R}$ est un produit hermitien sur l'espace vectoriel complexe E_x.

<u>Connexion</u>

Soit E un fibré vectoriel C^∞ (complexe) sur une variété analytique complexe.

On désigne par $C^\infty(U, E) := \Gamma(U, E)$.

$$A^p(U, E) = \Gamma(U, \Lambda^p(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \otimes E)$$

$$A^{p,q}(U, E) = \Gamma(U, \Lambda^{p,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \otimes E).$$

On appelle connexion sur E toute $\mathbb{C}$-dérivation $\nabla : \underset{\displaystyle E}{\overset{\displaystyle \|}{\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}} \otimes E}} \longrightarrow T_{\mathbb{C}}X^\vee \otimes E$

Pour tout ouvert U,

$$\nabla_U : \mathcal{C}^\infty(U, E) \longrightarrow A^1(U, E)$$

est $\mathbb{C}$-linéaire, et $\nabla_U(f \cdot s) = df \otimes s + f \nabla s$

(relation de Leibniz). $f \in A^0(U) = \Gamma(U, \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}})$.

$s \in A^0(U, E)$.

<u>Remarque</u> ① Si E est holomorphe, des construction existent encore (en prenant $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{O}_X} E$)

② Si E et F sont deux fibrés vectoriels. Deux connexions sur E et F induisent des connexions sur

$$E \oplus F \qquad E \otimes F \qquad \mathrm{End}\, E$$

$$\nabla_E + \nabla_F \qquad \nabla_E \otimes id_F + Id_E \otimes \nabla_F \qquad [\nabla_E, \cdot\,]$$

③ Si E est un fibré vectoriel sur X muni d'une connexion ∇, on peut définir

$$\nabla : A^p(U,E) \longrightarrow A^{p+1}(U,E)$$

via la relation de Leibniz :

$$\forall\, \alpha \in A^p(U), \quad s \in A^0(U,E)$$

$$\nabla(\alpha s) = d\alpha \otimes s + (-1)^p \alpha \otimes \nabla s$$

En général, on a pour $\alpha \in A^p(U)$, $\xi \in A^q(U,E)$

$$\nabla(\alpha \wedge \xi) = d\alpha \wedge \xi + (-1)^p \alpha \wedge \nabla(\xi).$$

En particulier ∇^2 est $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$ linéaire :

pour $f \in \mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C})$, $\xi \in A^p(U,E)$, on a

$$\nabla^2(f\xi) = \nabla(df \wedge \xi + f \wedge \nabla\xi) = d^2 f \wedge \xi - df \wedge \nabla\xi + df \wedge \nabla\xi + f \wedge \nabla^2\xi$$

$$= f \cdot \nabla^2 \xi.$$

On définit la courbure de ∇ comme

$$\Theta(\nabla) := \frac{i}{2\pi} \nabla^2 \in A^2(X, \mathrm{End}(E))$$

Courbure sur $\mathrm{End}(E)$. $\forall\, \alpha \in A^p(U, \mathrm{End}(E))$

$$\nabla_{\mathrm{End}(E)}(\alpha) = [\nabla, \alpha]$$

Si $s \in \mathcal{C}^\infty(U,E)$ on a

$$\left(\nabla_{\mathrm{End}(E)}(\alpha)\right)(s) = \nabla(\alpha(s)) - (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha(\nabla(s))$$

Montrons que $\nabla_{\mathrm{End}(E)}$ est une connexion sur $\mathrm{End}(E)$.

Si $\xi \in A^p(U)$, $\alpha \in A^q(U, \mathrm{End}(E))$ et $s \in \mathcal{C}^\infty(U,E)$.

$$\nabla_{\mathrm{End}(E)}(\xi \wedge \alpha)(s) = \nabla((\xi \wedge \alpha)(s)) - (\xi \wedge \alpha)(\nabla(s))$$

$$= \nabla(\xi \wedge \alpha(s)) - (-1)^{p+q} \xi \wedge \alpha(\nabla(s)) = d\xi \wedge \alpha(s) + (-1)^p \xi \wedge \nabla(\alpha(s))$$
$$- (-1)^p \xi \wedge (-1)^q \alpha(\nabla(s))$$

$$= d\xi \wedge \alpha(s) + (-1)^p \xi \wedge \nabla_{\mathrm{End}(E)}(\alpha)(s).$$

Identité de Bianchi : $\nabla_{\mathrm{End}(E)}(\Theta(\nabla)) = 0$

$$\overset{\shortparallel}{[\nabla, \tfrac{i}{2\pi}\nabla^2]} = \frac{i}{2\pi}\nabla^3 - \frac{i}{2\pi}\nabla^3$$

<u>Connexion de Chern</u> Soit X un variété analytique complexe

L'opérateur $\bar\partial : \mathcal{C}^\infty_X \longrightarrow \Lambda^{0,1}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)$ est une dérivation $\mathcal{O}_X$-linéaire

Si E est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, on peut définir $\bar\partial : \mathcal{C}^\infty_X \otimes_{\mathcal{O}_X} E \longrightarrow \Lambda^{0,1}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} E$

comme $\bar\partial \otimes id$ (par abus de notation), et plus généralement

$$\bar\partial : \Lambda^{p,q}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} E \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} E .$$

Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne h de classe C^∞.

$$h : E \times E \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_X$$

induit $$\left(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{a}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)\right) \times \left(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{b}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)\right) \longrightarrow \Lambda^{a+b}(T_{\mathbb{C}}X^\vee)$$

$$(s \otimes \alpha , t \otimes \beta) \longmapsto \langle s, t\rangle_h \, \alpha \wedge \bar\beta .$$

<u>Proposition</u> Soient X une variété analytique complexe, E un fibré vectoriel holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne de classe C^∞. Il existe une unique connexe ∇ sur E qui vérifie les conditions suivantes

(1) pour tout ouvert U de X et $s, t \in \mathcal{C}^\infty(U, E)$, on a

$$d\langle s, t\rangle_h = \langle \nabla s, t\rangle_h + \langle s, \nabla t\rangle_h$$

(2) $\nabla^{0,1} : \mathcal{C}^\infty_X \otimes_{\mathcal{O}_X} E \longrightarrow \Lambda^{0,1}(T_{\mathbb{C}}X^\vee) \otimes_{\mathcal{O}_X} E$

s'identifie à $\bar\partial$. noté $\nabla_{(E,h)}$

Cette connexion s'appelle la <u>connexion de Chern</u> de (E, h), sa courbure est appelée la courbure de (E, h), noté comme $\Theta(E, h)$.

<u>Démonstration</u> Montrons d'abord ~~l'existence~~ l'unicité (on supposons).

Soient U un ouvert non-vide de X et s, t deux sections avec t holomorphe de X, on a

$$\partial \langle s, t\rangle_h = \langle \nabla^{1,0} s, t\rangle_h + \langle s, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\nabla^{0,1} t}}\rangle_h \qquad (*)$$

$\Rightarrow \nabla^{1,0}$ est uniquement déterminé par $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ ($\langle \cdot, \cdot\rangle_h$ est parfait)

On prend $\nabla : C^\infty_X \otimes E \to (T_{\mathbb{C}} X^\vee) \otimes E$

tel que $\nabla^{0,1} = \bar\partial$ et que $\nabla^{1,0}$ déterminé par (*).

Montrons que ∇ est une connexion.

Localement sur un petit ouvert U, une section de classe C^∞ de E s'écrit comme une somme des sections de la forme $f \otimes t$, où f est une fonction complexe de classe C^∞ et t est une section holomorphe. on a pour toute section $s \in C^\infty(U, E)$

$$\langle \nabla s, f\otimes t\rangle$$

$$= \langle \nabla^{1,0} s, f\otimes t\rangle + \langle \bar\partial s, f \otimes t\rangle$$

$$= \bar f \langle \nabla^{1,0} s, t\rangle + \bar f \langle \bar\partial s, t\rangle$$

$$= \bar f\, \partial \langle s, t\rangle + \bar f \langle \bar\partial s, t\rangle = \partial\left(\bar f \langle s, t\rangle\right) - \langle s, t\rangle \partial(\bar f) + \bar f \langle \bar\partial s, t\rangle$$

$$= \partial \langle s, f\otimes t\rangle - \langle s, \bar\partial f \otimes t\rangle + \langle \bar\partial s, f\otimes t\rangle$$

$$= \partial \langle s, f\otimes t\rangle - \langle s, \bar\partial(f\otimes t)\rangle + \langle \bar\partial s, f \otimes t\rangle.$$

car t est holomorphe

Donc pour $t' \in C^\infty(U, E)$, on a

$$\langle \nabla s, t'\rangle = \partial\langle s, t'\rangle - \langle s, \bar\partial t'\rangle + \langle \bar\partial s, t'\rangle.$$

De même $\langle s, \nabla t'\rangle = \overline{\langle \nabla t', s\rangle} = \overline{\partial\langle t', s\rangle - \langle t', \bar\partial s\rangle + \langle \bar\partial t', s\rangle}$

$$= \bar\partial \langle s, t'\rangle - \langle \partial s, t'\rangle + \langle s, \bar\partial t'\rangle$$

la somme donne $\langle \nabla s, t'\rangle + \langle s, \nabla t'\rangle = d\langle s, t'\rangle$. ✱

Proposition La courbure $\Theta(E, h)$ est une section dans $A^{1,1}(\mathrm{End}(E))$.

Démonstration Soient U un ouvert non-vide de X et s, t deux sections dans $C^\infty(U, E)$, (t holomorphe) on a

$$\langle \nabla s, t\rangle = \partial\langle s, t\rangle + \langle \bar\partial s, t\rangle$$

donc $d\langle \nabla s, t\rangle = \bar\partial\partial\langle s, t\rangle + d\langle \bar\partial s, t\rangle$

$$= \bar\partial\partial\langle s, t\rangle + \langle \nabla\bar\partial s, t\rangle + \langle \bar\partial s, \nabla t\rangle$$

$$= \bar\partial\partial\langle s, t\rangle + \langle \nabla^{1,0}\bar\partial s, t\rangle + \langle \bar\partial s, \nabla t\rangle$$

en outre $d\langle \nabla s, t\rangle = \frac{2\pi}{i}\langle \Theta s, t\rangle + \langle \nabla s, \nabla t\rangle \in A^{1,1}(U)$

$$\langle \nabla s, \nabla t\rangle - \langle \bar\partial s, \nabla t\rangle = \langle \nabla^{1,0} s, \nabla t\rangle = \langle \nabla^{1,0} s, \nabla^{1,0} t\rangle \in A^{1,1}(U).$$

car t est holomorphe

__Courants__

Soit X une variété analytique complexe. Pour toute carte U de X et toute partie compacte F dans U, on définit une semi-norme $s \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$

$$p^{s}_{F,U,d} \text{ sur } C^\infty(X, \Lambda^d T_{\mathbb{C}} X^\vee) = A^d(X)$$

telle que

$$p^{s}_{F,U,d}(u) = \sup_{x\in F} \max_{\substack{|I|=d\\ |\alpha|\leq s}} |\partial^\alpha u_I(x)|$$

où $u = \sum_{|I|=d} u_I \, dx_I$ sur la carte U.

On munit $A^d(X)$ la topologie la plus fine qui rend toutes ces semi-normes continues. Soit $A^d_c(X)$ le sous-espace de $A^d(X)$ formé des formes à support compact.

On appelle courant de dimension d l'espace des formes linéaires continues sur $A^d_c(X)$. L'espace des courants de dimension d est noté comme $\mathcal{D}_d(X)$ ou comme $\mathcal{D}^{n-d}(X)$, où n est la dimension (réelle de X).

__Exemple__ ① Si $u \in A^d(X)$, alors u définit un courant dans $\mathcal{D}^d(X)$ tel que $\forall \varphi \in A^{n-d}_c(X)$

$$\langle [u], \varphi\rangle = \int_X u \wedge \varphi$$

② Soit Z un sous-ensemble analytique complexe de dimension d complexe de X (localement défini par une famille de fonction analytique). On définit un courant $[Z] \in \mathcal{D}_{2d}$ tel que

$$\forall \varphi \in A^{2d}_c(X), \quad \langle [Z], \varphi\rangle = \int_{Z_{reg}} \varphi$$