Opérations sur les courants

On fixe une variété analytique complexe X de dimension réelle n

① dérivation extérieur

$$d : \mathcal{D}^p(X) \longrightarrow \mathcal{D}^{p+1}(X)$$

(Similairement on peut définir ∂, $\bar{\partial}$)

pour tout $T \in \mathcal{D}^p(X)$ et tout $u \in A_c^{n-p-1}(X)$.

$$\langle dT, u\rangle := (-1)^{p+1}\langle T, du\rangle$$

Exemple

On désigne par $\mathcal{L}^1_{X,loc}$ le faisceau des fonctions localement intégrables (ce n'est pas un faisceau d'anneaux !)

Si α est une section globale de $\mathcal{L}^1_{X,loc} \otimes \Lambda^p(T_{\mathbb{C}}X^\vee)$ elle définit un courant $[\alpha]$ tel que

$$\langle [\alpha], \beta\rangle = \int_X \alpha \wedge \beta \qquad \forall\ \beta \in A_c^{n-p}(X)$$

Prop Si α est de classe C^1 (une section de $\mathcal{C}^1_X \otimes \Lambda^p(T_{\mathbb{C}}X^\vee)$)

alors $d[\alpha] = [d\alpha]$

Preuve D'après la formule de Stokes, pour $u \in A^{n-p-1}(X)$, on a

$$0 = \int_X d(\alpha \wedge u) = \int_X d\alpha \wedge u + (-1)^p \int_X \alpha \wedge du$$

Donc $\langle [d\alpha], u\rangle = (-1)^{p+1}\langle \alpha, du\rangle = \langle d[\alpha], u\rangle$.

Proposition Si $Z \subset X$ est une sous-variété lisse à bord lisse par morceaux (fermée orientée)

$$d[Z] = (-1)^{n-p+1}[\partial Z]$$

où p est la dimension réelle de Z

Preuve Par la formule de Stokes, on a

$$\int_{\partial Z} u = \int_Z du$$

② produit extérieur

Si T est un courant dans $\mathcal{D}^q(X)$ et $g \in A^r(X)$, on définit $T \wedge g$ comme le courant tel que, $\forall\ u \in A_c^{n-q-r}(X)$, on a

$$\langle T \wedge g, u\rangle = \langle T, g \wedge u\rangle$$

Proposition Si $T \in \mathcal{D}^q(X)$, $g \in A^r(X)$, on a
$$d(T \wedge g) = dT \wedge g + (-1)^q T \wedge dg$$
Démonstration Soit $u \in A_c^{n-q-r}(X)$, on a

$$\langle d(T\wedge g), u\rangle = (-1)^{q+r+1} \langle T\wedge g, du\rangle = (-1)^{q+r+1} \langle T, g \wedge du\rangle$$
$$= (-1)^{q+1} \langle T, d(g\wedge u) - dg \wedge u\rangle = \langle dT, g\wedge u\rangle + (-1)^q \langle T, dg \wedge u\rangle$$
$$= \langle dT \wedge g + (-1)^q T \wedge dg, u\rangle.$$ ✡

Soit $F : X \to Y$ un morphisme C^∞ propre entre des variétés analytiques complexes (l'image réciproque d'un compact est compact).

On définit
$$F_* : \mathcal{D}_p(Y) \longrightarrow \mathcal{D}_p(X)$$ tel que, pour toute $\varphi \in A_c^p(X)$,
$$\langle F_* T, \varphi\rangle = \langle T, F^* \varphi\rangle.$$
$F_* T$ est appelé l'image directe de T par F.

Si $F : X \to Y$ est une submersion (localement difféomorphe à une projection) pour $\varphi \in A_c^p(X)$, on peut définir $F_*\varphi \in A_c^{p-\dim X+\dim Y}(X)$ telle que
$$F_*\varphi(y) = \int_{F^{-1}(y)} \varphi(x).$$

F_* ainsi construit est continu pour les topologies que l'on a défini dans la dernière séance. Cela nous permet de définir
$$F^* : \mathcal{D}_{p-n+m}(Y) \longrightarrow \mathcal{D}_p(X)$$
telle $\langle F^* T, \varphi\rangle = \langle T, F_* \varphi\rangle.$

exemple Si Z est un sous-ensemble analytique (réduit) de Y, alors
$$F^*[Z] = [F^{-1}(Z)].$$

Formule de Cauchy Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ à bord C^1 par morceaux. Pour tout fonction $f \in C^1(U, \mathbb{C})$ et $w \in \overset{\circ}{K}$, on a
un voisinage ouvert de K
$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-w} + \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar z} \frac{dz\wedge d\bar z}{z-w}\right). \qquad (*)$$

Comme $\frac{dz\wedge d\bar{z}}{z}$ est une $(1,1)$-forme à coefficients localement intégrable, la partie à droite de $(*)$ est bien défini. Ops $\omega=0$

D'après la formule de Stokes, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z}dz-\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z}dz\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{z\in K\\ |z|>\varepsilon}}\bar\partial\left(\frac{f(z)}{z}dz\right)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{z\in K\\ |z|>\varepsilon}}\frac{\partial f}{\partial\bar z}\frac{dz\wedge d\bar z}{z}$$

qui converge vers $-\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{\partial f}{\partial\bar z}\frac{dz\wedge d\bar z}{z}$ $\quad(\varepsilon\to 0)$

En outre,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varepsilon e^{i\theta})d\theta\longrightarrow f(0).$$

#

<u>Corollaire</u> On a

$$dd^c[\log|z|^2]=\underbrace{\delta_0}_{\text{mesure de Dirac}}\in\mathcal{D}'^{1,1}(\mathbb{C}).$$

<u>Preuve</u> Comme $\log|z|^2\in L^1_{loc}(\mathbb{C})$, on a $\partial[\log|z|^2]\in\mathcal{D}'^{0,1}(\mathbb{C})$.

pour toute $\alpha\in A_c^{0,1}(\mathbb{C})$, on a

$$\langle\partial[\log|z|^2],\alpha\rangle=-\langle[\log|z|^2],\partial\alpha\rangle=-\int_{\mathbb{C}}\log|z|^2\,\partial\alpha$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|z|>\varepsilon}\log|z|^2\,\partial\alpha=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|z|>\varepsilon}\frac{dz}{z}\wedge\alpha-\partial(\log|z|^2\alpha)$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|z|>\varepsilon}d(\log|z|^2\alpha)+\int_{\mathbb{C}}\frac{dz}{z}\wedge\alpha$$

$$=\underbrace{\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|z|=\varepsilon}\log|z|^2\alpha}_{O(\varepsilon\log\varepsilon^2)=o(1)}+\left\langle\left[\frac{dz}{z}\right],\alpha\right\rangle=\left\langle\left[\frac{dz}{z}\right],\alpha\right\rangle$$

Enfin, pour $g\in A_c^0(\mathbb{C})$, on a

$$\langle dd^c[\log|z|^2],g\rangle=\frac{i}{2\pi}\left\langle\bar\partial\left[\frac{dz}{z}\right],g\right\rangle=g(0)$$ d'après la formule de Cauchy.

__Théorème__ (Lelong-Poincaré) Soient X une variété analytique complexe, L un fibré inversible hermitien et s une section méromorphe de L. Alors la fonction $\log \|s\|_h^2$ est localement intégrable et on a

$$dd^c \left[\log \|s\|_h^2\right] = [\operatorname{div}(s)] - [\Theta(L,h)].$$

__Démonstration__ On choisit une trivialisation σ de L au-dessus d'un ouvert (carte) U et on écrit s sous la forme $f\sigma$ avec f méromorphe sur U.

On a
$$\log\|s\|_h^2 = \log|f|^2 + \log\|\sigma\|_h^2$$

Montrons d'abord que $dd^c\left[\log\|\sigma\|_h^2\right] = [\Theta(L,h)]$ sur U

On a $dd^c = \frac{i}{2\pi}\partial\bar\partial = \frac{-i}{2\pi} d\partial$ car $\partial^2 = 0$

$$\partial\left[\log\|\sigma\|_h^2\right] = \frac{1}{\|\sigma\|_h^2}\,\partial\langle \sigma,\sigma\rangle$$

$$= \frac{1}{\|\sigma\|_h^2}\langle\nabla\sigma,\sigma\rangle \qquad \text{car } \sigma \text{ est holomorphe}$$

$$d\partial\left[\log\|\sigma\|_h^2\right] = \frac{\langle\nabla^2\sigma,\sigma\rangle + \langle\nabla\sigma,\nabla\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle} - \underbrace{\frac{\langle\nabla\sigma,\sigma\rangle\langle\nabla\sigma,\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle^2}}_{=0} - \frac{\langle\nabla\sigma,\sigma\rangle\langle\sigma,\nabla\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle^2}$$

$$= \frac{\langle\nabla^2\sigma,\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle} \qquad \text{car les termes sont dans } A^{1,1}(X)$$

$$\Rightarrow dd^c\left[\log\|\sigma\|_h^2\right] = -\frac{i}{2\pi}\frac{\langle\nabla^2\sigma,\sigma\rangle}{\langle\sigma,\sigma\rangle} = -[\Theta(L,h)].$$

Quitte à écrire f comme le quotient de deux fonctions holomorphes, on peut supposer f holomorphe. Soit $Y = (f=0)$.

On constate que $[Y]$ et $dd^c\log|f|^2$ coïncide sur Y_{reg}.

En effet, localement d'un un voisinage U d'un point de régularité de Y, $f : U \to \mathbb{C}$ est une submersion.

On a $[Y] = f^*\delta_0 = f^* dd^c\left[\log|z|^2\right] = dd^c\left[\log|f|^2\right]$.

Comme Y_{sing} est de dimension inférieure à celle de Y, on obtient le résultat.

$\#$

eg. ① Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible qui admet une section non-nulle s, $Y = (s=0)$. Supposons que L est muni d'une métrique hermitienne lisse h. L'équation de Lelong-Poincaré donne $dd^c[\log \|s\|_h^2] = [Y] - [\Theta(L,h)]$.

$[\log \|s\|_h^2]$ est donc un courant de Green à pôle logarithmique de $[Y]$.

② Soit X une variété projective sur $\mathbb{C}$ et $Y \xrightarrow{i} X$ une immersion régulière. Soit $\mathcal{I}_Y$ l'idéal de Y dans X. Rappelons que l'éclatement de X le long de Y est défini comme

$$\tilde{X} = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{I}_Y^n\right) \xrightarrow{\pi} X$$

Le diviseur exceptionnel E correspond à un sous-schéma fermé de $\tilde{X}$ dont l'idéal est $\mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Donc $E \cong \mathbb{P}(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2)$

Soit $\mathcal{O}(E)$ le diviseur de Cartier correspondant à E $\quad \mathcal{C}_{Y/X}$.

(qui est le dual du faisceau universel de $\tilde{X}$).

Soit s la section globale de $\mathcal{O}(E)$ qui défini le diviseur exceptionnelle (le noyau de $s: \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to \mathcal{O}(E)$ correspond à $\mathcal{I}_Y \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$)

On muni $\mathcal{O}(E)$ d'une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$, notée comme $\|\cdot\|_h$ sur $\tilde{X}$, on a

$$dd^c[\log \|s\|_h^2] = [E] - \Theta(\mathcal{O}(E), h)$$

d'après la formule de Lelong Poincaré.

Soient $i: Y \hookrightarrow X$ et $j: E \hookrightarrow \tilde{X}$ des morphismes d'inclusion

On a $[E] = j_*[1]$ et $[Y] = i_*[1]$

fonction constante 1

Soit p la codimension (complexe ou Krull) de Y dans X.

Soit $\alpha \in A^{p-1,p-1}(X)$. on a

formule de projection

$$\pi_*(\alpha \wedge [E]) = \pi_*(\alpha \wedge j_*[1]) = \pi_*(j_*(j^*\alpha))$$

$= i_* \pi_{Y*}(j^*\alpha)$ où π_Y est la restriction de π à E

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & \tilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

Courant de Green.

Soient X une variété analytique complexe, $Y \subset X$ une sous-vars. analytique. On appelle courant de Green de Y tout courant g_Y tel que
$$[Y] + dd^c g_Y$$
est le courant associé à une forme lisse ω_Y.

On dit que g_Y est un courant de Green à pôle logarithmique le long de Y si les condition suivantes sont vérifiées

① La restriction de g_Y à $X \setminus Y$ est induit par une forme lisse

② il existe une variété analytique complexe M et un morphisme propre $\pi : M \longrightarrow X$, ainsi qu'une forme φ sur $M \setminus \pi^{-1}(Y)$ tels que

(i) $g_Y|_{X \setminus Y}$ est l'image directe de φ par $\pi|_{M \setminus \pi^{-1}(Y)}$

(ii) $\pi^{-1}(Y)$ est un diviseur à croissement normaux

(iii) pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x (une carte holomorphe) et un système de coordonnées holomorphes $(z_1, \cdots, z_n)$ de U tel que x s'identifie à $(0, \cdots, 0)$ et que $\pi^{-1}(Y) \cap U$ soit déterminé par l'équation $z_1 \cdots z_k = 0$, que φ s'écrit localement comme $\sum_{i=1}^{k} \log|z_i|^2 \alpha_i + \beta$

où α_i et β sont des formes lisse, $\partial \alpha_i = 0$. $\bar\partial \alpha_i = 0$ sur U.

Remarque 8. g_Y est un courant de Green à pôle logarithmique, où Y est de codimension (complexe) p dans X, alors g_Y est un courant dans $\mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$ induit par une forme de bidegré $(p-1, p-1)$ à coefficient dans $\mathcal{L}^1_{loc,X}$ car φ est une forme à coefficient dans $\mathcal{L}^1_{loc}$

$\pi_{Y*}(j^*\alpha) \in A^{0,0}(Y)$ est une fonction sur Y dont la valeur en $y \in Y$ est

$$\int_{\pi_Y^{-1}(y)} j^*\alpha = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{C}_{Y/X}(y))} \alpha$$

↖ fibre en y

- Si cette intégrale est égale à 1 partout, alors on a

$$\pi_*(\alpha \wedge [E]) = [Y].$$

- Si de plus α est fermée, on a

$$\pi_*(\alpha \wedge dd^c[\log\|s\|_h^2]) = dd^c\pi_*([\alpha \cdot \log\|s\|_h^2])$$

$$= \pi_*(\alpha \wedge [E]) - \pi_*([\alpha \wedge \Theta(\mathcal{O}(E), h)])$$

$$= [Y] - \pi_*([\alpha \wedge \Theta(\mathcal{O}(E), h)])$$

- Si de plus

$\alpha \wedge \Theta(\mathcal{O}(E), h)$ s'écrit sous la forme $\pi^*\beta + dd^c\gamma$ (dans $A(X)$, dans $A(\tilde{X})$)

alors $\pi_*([\alpha \wedge \Theta(\mathcal{O}(E), h)]) = \pi_*\pi^*[\beta] + dd^c\pi_*[\gamma]$

$$= \beta + dd^c\pi_*[\gamma]$$

$\Longrightarrow$ $\pi_*(\alpha \log\|s\|_h^2 + \gamma)$ est un courant de Green à pôle logarithmique pour Y.

Outils utilisés.

① formes de Chern.

Soient X une variété analytique complexe, (E, h) un fibré vectoriel holomorphe muni d'une métrique lisse. On définit $c_i(E, h)$ $\in A^{dd}(X)$ par la relation

$$\det(I + t\,\Theta(E, h)) = \sum_{i \geq 0} c_i(E, h)\, t^i.$$

(définition similaire pour une connexion ∇_E)

Proposition Les formes $c_i(E, h)$ sont fermées.

Preuve Soient r le rang de E et $c(E, h) = \det(I + \Theta(E, h))$

$$= \sum_{i \geq 0} c_i(E, h)$$

On a $d\, c(E,h) = d \bigwedge^r (I + \Theta(E,h)) = \nabla\left(\bigwedge^r (I+\Theta(E,h))\right)$

$$= r\, \nabla_{End(E)} (I + \Theta(E,h)) \wedge \bigwedge^{r-1}(I+\Theta(E,h)) = 0 .$$ #

<u>Proposition</u> La classe de cohomologie de $c_i(E,h)$ dans $H^{2i}(X,\mathbb{C})$ ne dépend pas du choix de métrique (on peut même montrer que la classe de cohomologie ne dépend pas du choix de la connexion).

<u>Preuve</u> Soient ∇_1 et ∇_0 deux connexions. $\nabla_1 - \nabla_0$ est C^∞_X-linéaire, donc correspond à un élément $A \in A^1(X, End(E))$

Soit $\nabla_t = \nabla_0 + tA$.

On a $-2\pi i\, \Theta(\nabla_t) = \nabla_t^2 = \nabla_0^2 + t[\nabla_0, A] + t^2 A\wedge A$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\Theta(\nabla_t) = \frac{i}{2\pi}[\nabla_0, A] + \frac{i}{\pi} t\, A\wedge A$$

$$= \frac{i}{2\pi}[\nabla_t, A] = \frac{i}{2\pi}\nabla_{t,End(E)}(A)$$

$$c(E,\nabla_1) - c(E,\nabla_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} c(E,\nabla_t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \bigwedge^r (I + \Theta(\nabla_t))dt = r\int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\Theta(\nabla_t)\right)\wedge \bigwedge^{r-1}(I+\Theta(\nabla_t))\, dt$$

$$= r \int_0^1 \frac{i}{2\pi}\nabla_t(A)\wedge \bigwedge^{r-1}(I+\Theta(\nabla_t))\, dt$$

Bianchi

$$= \frac{ir}{2\pi}\int_0^1 \nabla_t\left(A\wedge \bigwedge^{r-1}(I+\Theta(\nabla_t))\right) dt$$

$$= \frac{ir}{2\pi}\int_0^1 d\left[A\wedge \bigwedge^{r-1}(I+\Theta(\nabla_t)\right] dt$$

$$= \frac{ir}{2\pi} d\left(\int_0^1 A\wedge \bigwedge^{r-1}(I+\Theta(\nabla_t))\, dt\right)$$ est exacte. #

$c_i(E) :=$ la classe de cohomologie de $c_i(E,h)$ s'appelle la $i^{\text{ème}}$ classe de Chern de E.

C'est une classe dans $H^{2i}(X,\mathbb{C})$.