Cohomologie de Dolbeault, cohomologie des courants Séance 7 ①

Soient X une variété analytique complexe, $p \in \mathbb{N}$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda^{p,0} T_{\mathbb{C}} X^{\vee} & \xrightarrow{\bar\partial} & \Lambda^{p,1} T_{\mathbb{C}} X^{\vee} & \xrightarrow{\bar\partial} & \Lambda^{p,2} T_{\mathbb{C}} X^{\vee} & \xrightarrow{\bar\partial} & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & (*) \\ \mathcal{D}_X^{p,0} & \xrightarrow[\bar\partial]{} & \mathcal{D}_X^{p,1} & \xrightarrow[\bar\partial]{} & \mathcal{D}_X^{p,2} & \xrightarrow[\bar\partial]{} & \cdots \end{array}$$

où $\mathcal{D}_X^{p,q}$ est le faisceau des courants de bidegré (p,q)

Théorème de Dolbeault-Grothendieck

Ces deux complexes sont des résolutions acycliques du faisceau des p-formes holomorphes $(\mathrm{Ker}(\bar\partial : \Lambda^{p,0} T_{\mathbb{C}} X^{\vee} \longrightarrow \Lambda^{p,1} T_{\mathbb{C}} X^{\vee}))$ et le diagramme $(*)$ induit un isomorphisme de cohomologies

$$H^{\cdot}(A^{p,\cdot}(X), \bar\partial) \longrightarrow H^{\cdot}(\mathcal{D}^{p,\cdot}(X), \bar\partial).$$

i.e. tout courant fermé de bidegré (p,q) est cohomologue à une forme lisse de même bidegré.

Théorème Soit X un variété projective complexe. Pour toute sous-variété $Y \subset X$ il existe un courant de Green à pôle logarithmique le long de Y.

(Pour la démonstration, voir Soulé ... Lecture on Arakelov geometry Page 44).

Groupes de Chow arithmétique

Définition. variété arithmétique (projective) : schéma régulier qui est projectif et plat sur Spec $\mathbb{Z}$.

Soit X une variété arithmétique. La conjugaison complexe induit une involution de $X^{an}(\mathbb{C})$ que l'on note comme F_∞. On définit

$$A^{p,p}(X) = \left\{ \omega \in A^{p,p}(X^{an}(\mathbb{C})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega \text{ réelle (invariante sous conj. complexe)} \\ F_\infty^*(\omega) = (-1)^p \omega \end{array} \right\}$$

$$Z^{p,p}(X) = \operatorname{Ker}\left(d : A^{p,p}(X) \longrightarrow A^{2p+1}(X^{an}(\mathbb{C}))\right)$$
$$\tilde{A}^{p,p}(X) = A^{p,p}(X) / (\operatorname{Im}\partial + \operatorname{Im}\bar\partial)$$
$$\mathcal{D}^{p,p}(X) := \{ T \in \mathcal{D}^{p,p}(X^{an}(\mathbb{C})) \mid T \text{ réelle}, \ F_\infty^* T = (-1)^p T \}.$$

Si Z est un cycle effectif de codimension p, il définit un sous-schéma fermé de X. En effet, on peut écrire Z sous la forme $Z = \sum_i n_i Z_i$, où $n_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, Z_i est un cycle premier de codimension p, alors $\prod_i \mathcal{I}_{Z_i}^{n_i}$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_X$ que l'on note $\mathcal{I}_Z$.
Ainsi Z_i définit un ensemble analytique dans $X^{an}(\mathbb{C})$ dont l'idéal est $\mathcal{I}_{Z_i}\mathcal{O}^{an}_{X(\mathbb{C})}$. On désigne par δ_{Z_i} le courant d'intégration correspondant. C'est un courant dans $\mathcal{D}^{p,p}(X)$. On note $\delta_Z = \sum_i n_i \delta_{Z_i}$.
En général, on écrit Z comme la différence de deux cycles effectifs Z_1, Z_2 et on écrit $\delta_Z := \delta_{Z_1} - \delta_{Z_2}$ (ne dépend pas du choix de Z_1, Z_2)

On appelle courant de Green de Z tout élément $g_Z \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$ tel qu'il existe $\omega_Z \in A^{p,p}(X)$ avec
$$dd^c g_Z + \delta_Z = [\omega_Z]$$
dans $\mathcal{D}^{p,p}(X)$.
On désigne par $\hat{Z}^p(X)$ l'ensemble des couples (Z, g_Z), où Z est un cycle de codimension p et g_Z est un courant de Green de Z. Si Z_1 et Z_2 sont deux cycles dans $Z^p(X)$, g_{Z_1} et g_{Z_2} des courants de Greens de Z_1 et Z_2 respectivement, alors $g_{Z_1} + g_{Z_2}$ est un courant de Green de $Z_1 + Z_2$.

<u>exemple</u> Soit Y un sous-schéma intègre de codimension $p-1$. Si f est une fonction rationnelle sur Y, alors elle induit une fonction méromorphe sur $Y^{an}(\mathbb{C})$. La formule de Lelong-Poincaré montre que $dd^c[\log|f|^2] = \delta_{\operatorname{div}(f)}$, donc $-[\log|f|^2]$ est un courant de Green pour $\operatorname{div} f$.

On désigne par $\widehat{R}^p(X)$ le sous-groupe de $\widehat{Z}^p(X)$ formé des couples de la forme

$\widehat{\mathrm{div}}(f) =$ · $(\mathrm{div}(f), -[\log |f|^2])$ pour f une fonction rationnelle sur un sous-schéma intègre de codimension p

· $(0, \partial(u) + \bar{\partial}(u'))$ où $u \in \mathcal{D}^{p-2,p-1}(X)$, $u' \in \mathcal{D}^{p-1,p-2}(X)$

Soit $\widehat{CH}^p(X) = \widehat{Z}^p(X)/\widehat{R}^p(X)$, appelé le groupe de Chow arithmétique.

Exemples ① $\widehat{CH}^0(X) = CH^0(X) \cong \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$

② Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle métrique hermitienne sur L toute métrique lisse $\|\cdot\|$ sur $L(\mathbb{C})$ (vu comme un fibré vectoriel sur $\underbrace{X(\mathbb{C})^{an}}_{\text{qui est invariante par } F_\infty}$). $\bar{L} = (L, \|\cdot\|)$ est appelé un fibré inversible hermitien sur X. Soit $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ le groupe des classes d'iso des fibrés inversibles hermitiens $/X$

Proposition On a un isomorphisme (Supposons X intègre)

$$\hat{c}_1 : \widehat{\mathrm{Pic}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^1(X)$$

qui envoie $(L, \|\cdot\|)$ à la classe de $[(\mathrm{div}(s), -[\log\|s\|^2]))]$ où s est une section rationnelle non-nulle (quelconque) de L.

Démonstration $\hat{c}_1$ est bien défini car deux sections rationnelle diffèrent par la multiplication d'une fonction rationnelle sur X. Il est en outre un morphisme de groupes. On construit l'inverse de $\hat{c}_1$. Comme X est un schéma regulier, un cycle de codimension 1 Z provient d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{O}_X(Z)$. On construit une métrique sur $\mathcal{O}_X(Z)(\mathbb{C})$ qui est localement donnée par la formule

$$\|f\|^2 = |f|^2 e^{-g_Z}$$

pour f une fonction rationnelle définissant $\mathcal{O}_X(Z)$ localement.

(on peut aussi dire que $\mathcal{O}_X(Z)$ admet une section rationnelle canonique s qui définit Z, on pose $\|fs\|^2 = |f|^2 e^{-g_Z(\cdot)}$). ✠

③ Dans le cas où $X = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ avec K un corps de nombres

$X(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\sigma: K \to \mathbb{C}} pt.$ $\quad \widehat{CH}^1(X) = cl(\mathcal{O}_K) \times \mathbb{R}^{M_{K,\infty}}$

$\widehat{CH}^1(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^{M_{K,\infty}} = \mathbb{R}^{\{\sigma: K \to \mathbb{C}\}}/F_\infty$

Intersection d'une classe de diviseur avec une classe de cycles

1. Cas géométrique.

Soient X un schéma noethérien et Y un sous-schéma intègre de X. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible L, on désigne par $c_1(L) \cap [Y]$ la classe du cycle $[\mathrm{div}(s)]$ où s est une section rationnelle non-nulle de $L_{|Y}$. (C'est un élément dans $CH(Y)$ qui se plonge dans $CH(X)$ de façon évident)

Cette construction induit un homomorphisme de groupes

$$c_1(L) : CH(X) \longrightarrow CH(X).$$

<u>Remarque</u> ① Si X est un schéma projectif et plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, alors $c_1(L)$ envoie $CH^p(X)$ en $CH^{p+1}(X)$

② Si L_1 et L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles, alors

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$$

③ Soient $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme propre, α un cycle de X'. alors

$$f_*(c_1(f^*L) \cap \alpha) = c_1(L) \cap f_*(\alpha).$$

④ Si L est le faisceau trivial, alors $c_1(L) = 0$.

⑤ Si L_1 et L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-module inversibles, alors

$$c_1(L_1) \cdot c_1(L_2) = c_1(L_2) \cdot c_1(L_1).$$

- ① est vrai lorsque X est caténaire.
- ② est d'après la construction
- ③ On peut supposer $\alpha = [X']$ et X', X intègres et f fini génériquement.

Localement $c_1(f^*L) \cap \alpha$ est donné par $[\mathrm{div}(r)]$ où r est une fonction rationnelle de X, vue comme une fonction rationnelle de X'

$$f_*(c_1(f^*L) \cap \alpha) = [\mathrm{div}(N_{R(X')/R(X)}(r))] = [\mathrm{div}(r^d)] = d\,[\mathrm{div}(r)]$$
$$= d \cdot c_1(L) \cap [X]$$
$$= c_1(L) \cap f_*(\alpha).$$

où $d = [R(X') : R(X)]$

- ④ par construction.

⑤ il suffit de vérifier que

$$c_1(L_1)\cap(c_1(L_2)\cap[X]) = c_1(L_2)\cap(c_1(L_1)\cap[X])$$

dans le cas où $[X]$ est intègre.

Traitons le cas où L_1 et L_2 admettent des sections globales s_1 et s_2 qui intersectent proprement. Soit V un sous-schéma fermé intègre de codimension 2 de X, Soit R l'anneau local de X en point générique de V.

les sections s_1 et s_2 correspond aux éléments a_1 et a_2 de R, quitte à choisir des trivialisations de L_1 et de L_2 autour du point générique de V. Soit $\textcircled{H}$ l'ensemble des idéaux premiers de codimension 1 dans R. Si p est un idéal dans $\textcircled{H}$ qui correspond à un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 Y dans V, alors le coefficient de $[Y]$ dans $[\mathrm{div}(s_i)]$ est $l_{R_p}(R_p/a_i R_p)$, et le coefficient de $[V]$ dans $[\mathrm{div}(s_i|_Y)]$ est $l_{R/p}(R/p+a_iR)$. Donc le coefficient de $[V]$ dans le représentant de $c_1(L_1)\cap(c_1(L_2)\cap[X])$ via les sections s_1 et s_2 est donc

$$\sum_{p\in \textcircled{H}} l_{A_p}(R_p/a_2R_p)\cdot \underbrace{l_{R/p}(R/p+a_1R)}_{e_R(a_1,\,R/p)} \overset{\text{Lemme }(*)}{=} e_R(a_1, R/a_2R)$$

$$= e_R(a_2, R/a_1R)$$

Soient $K_1 = \mathrm{Ker}(a_2 : R/a_1R \longrightarrow R/a_1R)$

$K_2 = \mathrm{Ker}(a_1 : R/a_2R \longrightarrow R/a_2R)$

pour $\bar{x}\in K_1$ on a $a_2x\in a_1R$ $\exists!\ y\in R$ $a_2x = a_1y$

$\Rightarrow \bar{y}\in K_2$

l'application $\begin{array}{ccc} K_1 & \longrightarrow & K_2 \\ \bar{x} & \longmapsto & \bar{y}\end{array}$ est un isomorphisme de A-modules.

<u>Lemme (*)</u> Soient A un anneau local noethérien de dimension 1, $\{p_i\}_{i=1}^n$ des idéaux premiers minimaux de A. Si M est un A-module de type fini et a est un élément de A qui n'est pas contenu dans $\bigcup_{i=1}^n p_i$, alors

$$e_A(a,M) = \sum_i l_{A_{p_i}}(M_{p_i})\cdot e_A(a, A/p_i) = \sum_i l_{A_{p_i}}(M_{p_i})\cdot l_A(A/p_i+aA)$$

cas général : Fulton : « Intersection theory » § 2.4 P35 – 38.

2. Intersection arithmétique

On fixe un schéma X projectif et plat sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ qui est intègre et régulier. On va construire

$$\widehat{CH}^p(X) \otimes \widehat{\operatorname{Pic}}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{p+1}(X).$$

<u>Moving lemma</u> Pour tout $\alpha \in Z^p(X)$, et tout $\beta \in Z^1(X)$ effectif, il existe $\beta' \in Z^1(X)$ rationnellement équivalent à β tel que β' intersecte α proprement.

<u>Preuve</u> On suppose $\alpha = \sum_i n_i [Y_i]$. Pour tout i soit y_i le point générique de Y_i.

Soit $R = \varinjlim_{\substack{U \subset X \text{ ouvert} \\ \{y_i\} \subset U}} \mathcal{O}_X(U)$. C'est un anneau semi-local régulier (qui n'admet qu'un nombre fini d'idéaux maximaux) donc un anneau factoriel. $\rightsquigarrow$ dans R, β est le diviseur de certaine fonction rationnelle $\rightsquigarrow$ il existe $\beta' \sim \beta$ qui ne contient pas les Y_i.

<u>Remarque</u> Par moving lemma, on peut démontrer la commutativité de produit d'intersection géométrique dans le cas de variétés arithmétiques.

<u>Produit des courants de Green</u>

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible hermitien sur X (tel que L soit ~~très~~ ample) non-necessaire.

Soit (Z, g_Z) un élément dans $\hat{Z}^p(X)$. D'après le moving lemma, il existe une section rationnelle s de L qui coupe Z proprement.

Rappelons que $-[\log\|s\|^2]$ est un courant de Green à pôle logarithmique de $[\operatorname{div}(s)]$: on a, d'après le théorème de Lelong-Poincaré

$$[\operatorname{div}(s)] - dd^c[\log\|s\|^2] = c_1(\overline{L})$$

la courbure de $(L(\mathbb{C}), h)$

<u>Lemme</u> On a

$$\delta_{\operatorname{div}(s) \cap Z} - dd^c\left([\log\|s\|^2] \cdot \delta_Z\right) = c_1(\overline{L}) \cdot \delta_Z$$

<u>Preuve</u> La formule est additive en Z, on se ramène donc au cas où Z est une sous-variété. Dans ce cas là, c'est simplement la formule de Lelong-Poincaré sur Z.

Proposition : $c_1(\overline{L})\cdot g_Z - [\log\|s\|^2]\cdot\delta_Z$
est un courant de Green à pôle logarithmique de $\mathrm{div}(s)\cap Z$.

Preuve Soit $\omega_Z = \delta_Z + dd^c g_Z$. C'est une forme lisse.
On a, d'après le lemme précédente,

$$\delta_{\mathrm{div}(s)\cap Z} - dd^c\left([\log\|s\|^2]\cdot\delta_Z\right) + c_1(\overline{L})\, g_Z = c_1(\overline{L})\cdot\omega_Z$$

qui est une forme lisse. Comme $[\log\|s\|^2]$ et g_Z sont à pôle logarithmique, il en est de même de $c_1(\overline{L})\cdot g_Z - [\log\|s\|^2]\cdot\delta_Z$. ⋇

Définition. Soit X une variété arithmétique. Pour tout fibré inversible hermitien $\overline{L}$ sur X, on désigne par $\hat{c}_1(\overline{L})$ l'opérateur sur $\widehat{CH}(X)$ qui envoie la classe d'un cycle arithmétique (Z, g_Z) en la classe de

$$\left(\mathrm{div}(s)\cap Z,\ \hat{c}_1(\overline{L})\cdot g_Z - [\log\|s\|^2]\cdot\delta_Z\right)$$

où s est une section rationnelle qui coupe Z proprement

- Cette définition ne dépend pas du choix de s.

  Si s' est une autre section rationnelle, alors $s' = f s$ où f est une fonction rationnelle sur X. (on la considère comme une fonction rationnelle sur une composante première Y dans Z)
  La différence entre $\left(\mathrm{div}(s)\cap Y,\ \hat{c}_1(\overline{L})\cdot g_Y - [\log\|s\|^2]\cdot\delta_Y\right)$
  et $\left(\mathrm{div}(s')\cap Y,\ \hat{c}_1(\overline{L})\cdot g_Y - [\log\|s'\|^2]\cdot\delta_Y\right)$
  est $\left(\mathrm{div}(f_{|Y}),\ -[\log|f|^2]\cdot\delta_Y\right) = \widehat{\mathrm{div}}(f_{|Y})$.

- Cette définition ne dépend pas du choix du cycle (Z, g_Z) dans la classe. (argument similaire au celui de l'énoncé précédent)

- $\hat{c}_1(\overline{L})$ est un morphisme de groupes $\widehat{CH}(X) \longrightarrow \widehat{CH}(X)$ qui envoie $\widehat{CH}^p(X)$ en $\widehat{CH}^{p+1}(X)$.

- $\hat{c}_1(\overline{L}_1\otimes\overline{L}_2) = \hat{c}_1(\overline{L}_1) + \hat{c}_1(\overline{L}_2)$.

- Si $\overline{L}$ est le faisceau trivial muni de la métrique usuelle. $(\|1\|=1)$
  alors $\hat{c}_1(\overline{L}) = 0$

⚠ $\hat{c}_1(\mathcal{O}_X, h)$ avec h non usuelle n'est pas nécessairement nulle.

• On a $\hat{c}_1(\bar{L}_1)\cdot\hat{c}_1(\bar{L}_2) = \hat{c}_1(\bar{L}_2)\cdot\hat{c}_1(\bar{L}_1)$

Il s'agit la commutativité du produit de courant de Green, voir H. Gillet et C. Soulé. Arithmetic intersection theory Publ. Math. IHES. 72 (1990) § 2.2 P115.

• Image directe.

Soient X et Y deux variétés arithmétiques, $\pi : X \to Y$ un morphisme propre tel que $\pi_{\mathbb{Q}} : X_{\mathbb{Q}} \to Y_{\mathbb{Q}}$ soit lisse de dimension relative d. alors on peut définir un homomorphisme homogène de degré $-d$

$$\pi_* : \widehat{CH}^{\cdot}(X) \longrightarrow \widehat{CH}^{\cdot-d}(Y).$$

$$(Z, g_Z) \longmapsto (\pi_*(Z), \pi_*(g_Z))$$

← intégration le long des fibres.

En particulier, si $Y = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, alors π_* envoie $\widehat{CH}^{d+1}(X)$ en $\widehat{CH}^1(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$. On le note comme $\widehat{\deg}$.

• Compatibilité de l'image directe avec l'image réciproque.

On a, pour tout $\bar{L} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(Y)$,

$$\pi_*(\hat{c}_1(\pi^*\bar{L})\cdot\alpha) = \hat{c}_1(\bar{L})\cdot\pi_*(\alpha).$$

On a déjà vérifier le cas géométrique, il reste la compatibilité pour les courants (exercice).

Hauteur d'une variété arithmétique

Soit X une variété arithmétique de dimension $d+1$ $(\dim X_{\mathbb{Q}} = d)$. Soit $(\bar{L}_i)_{i=0}^{d}$ une famille de fibrés inversibles hermitiens sur X. On définit la multi-hauteur de X par rapport à $(\bar{L}_i)_{i=0}^{d}$ comme

$$\widehat{\deg}(\hat{c}_1(\bar{L}_0)\cdots\hat{c}_1(\bar{L}_d)\cdot[X])$$

noté comme $h_{\bar{L}_0,\dots,\bar{L}_d}(X)$.

Si $\bar{L}_0 = \dots = \bar{L}_d = \bar{L}$, on note $h_{\bar{L}}(X)$ au lieu de $h_{\bar{L}_0,\dots,\bar{L}_d}(X)$.