Rappels sur la théorie des schémas

1. Point de vue de foncteurs

<u>An</u> catégorie des anneaux (commutatifs et unifères)

<u>Ens</u> catégorie des ensembles

préfaisceau : foncteur de <u>An</u> vers <u>Ens</u>

<u>PFai</u> catégorie des préfaisceaux

<u>Exemple</u> $\mathbb{A}^1$: foncteur oubli $\quad \mathbb{A}^r = \underbrace{\mathbb{A}^1 \times \dots \times \mathbb{A}^1}_{r \text{ copie}}$

Spec $\mathbb{Z}$: foncteur qui envoie tout en $\{\phi\}$. C'est un objet terminal dans la catégorie <u>PFai</u>

$\mathbb{P}^r$. $A \longmapsto$ facteur direct de rang 1 du A-module libre A^{r+1}

fonction régulière : $A(F) = \mathrm{Hom}(F, \mathbb{A}^1)$ pour F préfaisceau

<u>Ela</u> catégorie des espaces localement annelés.

<u>Théorème</u> Pour tout anneau A, le foncteur

$$\underline{Ela}^{op} \longrightarrow \underline{Ens}$$
$$X \longmapsto \mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X))$$

$$\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Spec} A) \cong \mathrm{Hom}(A, \mathcal{O}_X(X))$$
$$A(X) = \mathcal{O}_X(X)$$

est représentable (par un espace localement annelé que l'on note Spec A)

Ensemblistement Spec $A = \{$ idéaux premiers de $A\}$

les ouverts sont de la forme $D(\mathfrak{a}) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A \mid \mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a} \}$

où $\mathfrak{a}$ est un idéal premier de A

- tout espace localement annelé X peut être considéré comme un préfaisceau

$$X(A) = \mathrm{Hom}_{\underline{Ela}}(\mathrm{Spec} A, X)$$

- Le foncteur de <u>An</u> vers $\underline{PFai}^{op}$ qui envoie R en Spec R admet un adjoint à gauche, qui est le foncteur de fonctions régulières $F \longmapsto A(F)$

$$\mathrm{Hom}(F, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}(R, A(F))$$

2. Faisceaux

Définition Soit F un préfaisceau. On dit que F est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck si, pour tout anneau A et toute famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de A telle que

$A = \sum_{i\in I} A f_i$, le diagramme

$$F(A) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(A_{f_i}) \rightrightarrows \prod_{(j,k)\in I^2} F(A_{f_j f_k})$$

est une suite exacte dans $\underline{\mathrm{Ens}}$

eg. Le préfaisceau défini par un espace localement annelé est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck

3. Sous-préfaisceau ouvert.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A

- Soit $f : F \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ un monomorphisme de préfaisceau. S'il existe un isomorphisme de foncteurs $F \xrightarrow{\sim} D(\mathfrak{a})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Spec}\, A \\ D(\mathfrak{a}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

commute, on dit que F est un préfaisceau associé à l'idéal $\mathfrak{a}$.

- Soit $f : G \longrightarrow F$ un monomorphisme de préfaisceaux. Si pour tout anneau A et tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathrm{Spec}\, A \to F$, la première projection $pr_1 : \mathrm{Spec}\, A \times_F G \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ est associé à un idéal de A, on dit que f est une immersion ouverte.

- Propriété universelles.

Soit $\mathbb{P}$ une propriété de morphisme de préfaisceaux.

On dit qu'une autre propriété $\mathbb{Q}$ de morphisme de préfaisceaux est la version universelle de $\mathbb{P}$ si, pour touts morphismes $f : G \longrightarrow F$

on a $\mathbb{Q}(f) \Longleftrightarrow (\forall\, \varphi : H \longrightarrow F,\ \mathbb{P}(f_H))$

où $f_H : G \times_F H \longrightarrow H$ est la deuxième projection induite par f et φ. Si on a $\mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{Q}$, on dit que $\mathbb{P}$ est une propriété universelle.

Exemple "être une immersion ouverte" est une propriété universelle.

4. Schémas

Soit $(\varphi_i : F_i \to F)_{i\in I}$ est une famille de monomorphismes de préfaisceaux.
Si pour tout corps k on a $F(k) = \bigcup_{i\in I} \varphi_i(F_i(k))$, on dit que $(\varphi_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de F.
Si de plus les φ_i sont des immersions ouvertes, on dit que $(\varphi_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de F.

Définition On dit qu'un préfaisceau F est un *schéma* si :
① il est un faisceau pour la topologie de Zariski-Grothendieck
② il admet un recouvrement ouvert par les foncteurs représentables

Sch : sous-catégorie pleine de PFai des schémas

Théorème Le foncteur de *Ela* vers *PFai* qui envoie un espace localement annelé en le foncteur $A \mapsto \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec} A, X)$ admet un adjoint à gauche Rg. En outre, la restriction de Rg à *Sch* est un foncteur pleinement fidèle. (réalisation géométrique)

$$\mathrm{Hom}_{\underline{PFai}}(F, X) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{Ela}}(Rg(F), X)$$

Remarque • Si un préfaisceau provient d'un espace localement annelé X, alors sa réalisation géométrique est isomorphe à X.
• Si $f : F \to G$ est une immersion ouverte de préfaisceaux, alors $Rg(f)$ envoie $Rg(F)$ isomorphiquement en un sous-espace ouvert de $Rg(G)$.

Ce théorème nous permet de considérer les $\left\{\begin{array}{l}\text{schémas}\\ \text{morphismes de schémas}\end{array}\right.$ comme des $\left\{\begin{array}{l}\text{foncteurs}\\ \text{morphismes de foncteurs}\end{array}\right.$ et comme des $\left\{\begin{array}{l}\text{espaces annelés}\\ \text{morphismes d'espaces annelés}\end{array}\right.$

• Quand on parle des propriétés topologiques d'un préfaisceau F, on pense à $Rg(F)$. eg. X irréductible = pas union de deux fermés distincts de X

Soit $f : F \to G$ un morphisme de préfaisceaux. On dit que f est injectif, surjectif, bijectif, ouvert, fermé, dominant, quasi-compact si $Rg(f)$ l'est.

<u>Remarque</u> Soit $\varphi : X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques. φ est dite $\begin{smallmatrix}\text{ouverte}\\ \text{fermée}\end{smallmatrix}$ si φ envoie tout sous-ensemble $\begin{smallmatrix}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{smallmatrix}$ de X en un sous-ensemble $\begin{smallmatrix}\text{ouvert}\\ \text{fermé}\end{smallmatrix}$ de Y

- φ est dite dominante si l'image de φ est dense dans Y
- φ est dite quasi-compacte si l'image réciproque par φ de tout sous-ensemble ouvert quasi-compact de Y est un sous-ensemble quasi-compact de X.

Si $\Delta_f : F \longrightarrow F \times_G F$ est quasi-compact, on dit que f est quasi-séparé

Si $F \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ est $\begin{smallmatrix}\text{quasi-compact}\\ \text{quasi-séparé}\end{smallmatrix}$, on dit que F l'est.

Ce sont (qc, qs) des propriétés universelles stables par composition

5. Morphismes affines, immersions, morphismes séparés

Soit $f : F \to G$ un morphisme de préfaisceaux. Si, pour tout anneau A et tout morphisme $\mathrm{Spec}\,A \to G$, le produit fibré $(\mathrm{Spec}\,A) \times_G F$ est un foncteur représentable, on dit que f est un morphisme affine.

<u>Remarque</u> ① Si S est un schéma, $f : X \to S$ est un morphisme affine, alors X est aussi un schéma

② tout morphisme affine de schémas est quasi-compact

③ C'est une propriété universelle stable par composition

Soit $f : F \to G$ un morphisme de préfaiseau. Si f est affine et si, pour tout anneau A et tout morphisme $\mathrm{Spec}\,A \to G$, le morphisme de foncteurs représentables $(\mathrm{Spec}\,A) \times_G F \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$

correspond à un quotient de A, on dit que f est une immersion fermée.

<u>Remarque</u> ① Si A est un anneau et si I est un idéal de A. alors $\mathrm{Spec}(A/I) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,A$ est une immersion fermé.

② Si f est une immersion fermée, il est un morphisme injectif et fermé

③ c'est une propriété universelle stable par composition

④ Si $F \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} H$ sont des morphismes de préfaisceaux, φ étant une immersion fermée et ψ étant une immersion ouvert, alors il existe un préfaisceau U, une immersion ouverte $u: U \to H$ et une immersion fermée $v: F \longrightarrow U$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\psi"'] & U \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "\varphi"'] & H \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(Si F. G. H sont des schémas. il en est de même de U)

- On appelle immersion le composé d'une immersion ouverte avec une immersion fermée.
- Si $f: F \to G$ est un morphisme de préfaisceau tel que $\Delta_f : F \longrightarrow F \times_G F$ est une immersion fermée, on dit que f est un morphisme séparé

<u>Remarque</u> ① ce sont des propriétés universelles stable par composition

② séparé $\Longrightarrow$ quasi-séparé

③ tout morphisme affine est séparé.

6. Conditions de finitude

Soient A un anneau et B une A-algèbre. S'il existe un homomorphisme surjectif $A[T_1, \dots, T_n] \to B$, on dit que B est une A-algèbre de type fini. S'il existe un tel homomorphisme surjectif dont le noyau est un idéal de type fini, on dit que B est une A-algèbre de présentation finie.

<u>Définition</u> Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. Si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert affine U de x et un voisinage ouvert affine V de $f(x)$ tels que $f(U) \subset V$ et que l'homomorphisme $A(V) \to A(U)$ induit par f munisse $A(U)$ d'une structure de $A(V)$-algèbre de type fini (de présentation finie), on dit que f est un morphisme local^t de type fini (localement de présentation finie)

morphisme de type fini = morphisme localement de type fini et quasi compact

morphisme de présentation finie = morphisme localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé

<u>Remarque</u> ce sont des propriétés universelles stables par composition

<u>Définition</u> Soit X un schéma. Si X admet un recouvrement par des ouverts affines d'anneaux noethérien, on dit que X est un schéma localement noethérien. Si de plus X est quasi-compact, on dit que X est noethérien.

<u>Remarque</u> ① On suppose X localement noethérien. Pour tout ouvert affine U de X, $A(U)$ est un anneau noethérien

② On suppose X noethérien, alors toute chaîne décroissante de fermés de X est stationnaire. et X n'admet qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

On dit qu'un morphisme $f : X \to S$ est propre s'il est séparé, de type fini et universellement fermé.

7. conditions locales (morphismes réduits, plats)

Soit A un anneau. On dit que A est réduit si le nilradical (intersection de tous les idéaux premiers) réduit à $\{0\}$.

Soit X un schéma. Si, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau réduit, on dit que X est un schéma réduit.

Soit X un schéma. Si X est irréductible et réduit, on dit que X est un schéma intègre.

Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est plat si le foncteur $M \otimes_A -$ de A-Mod vers lui-même is exact.
Si B est une A-algèbre qui est plate comme A-module, on dit que B est une A-algèbre plate.

~~Soient~~ $f: X \to Y$ un morphisme de schémas, $x \in X$, $y = f(x)$. Si $\mathcal{O}_{X,x}$ est une $\mathcal{O}_{Y,y}$-algèbre plate, on dit que f est plat en x. Si f est plat en tout point de X, on dit que f est un morphisme plat.
Si f est plat et surjectif, on dit que f est fidèlement plat.
Ce sont des propriétés stables par composition.

8. Schémas normaux

Lemme (Cayley-Hamilton) Soient $\overbrace{A \text{ un anneau}}^{I \text{ un idéal de } A}$ et M un A-module engendré par n élément. Si $\varphi: M \to M$ est un morphisme de A-modules tel que $\varphi(M) \subset IM$, alors il existe un polynôme unitaire

$$P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n \in A[X]$$

tel que $a_i \in I^i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et que $P(\varphi) = 0$

Démonstration polynôme caractéristique d'une matrice de φ $\divideontimes$

Soient A un anneau et B une A-algèbre. On dit qu'un élément $x \in B$ est entier sur A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$. On dit que B est entière sur A si tout élément de B

est entier sur A.

<u>Remarque</u> Soient A un anneau et B une A-algèbres

① Si $x \in B$ est entier sur A, alors $A[x]$ est un A-module de type fini

② S'il existe un B-module N et un sous-A-module de type fini M de N, qui n'est pas annulé par aucun élément non-nul de B et tel que $xM \subset M$. alors x est entier sur A (par Cayley-Hamilton)
(En particulier, si $A[x]$ est contenu dans une sous-algèbre de B qui est un A-module de type fini, alors x est entier sur A)

③ les éléments dans B entiers sur A forment une sous-A-algèbre de B appelé la fermeture intégrale de A dans B.

④ si S est une partie multiplicative de A, C est la feremeture intégrale de A dans B, alors $S^{-1}C$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans $S^{-1}B$

⑤ Si A est un anneau intègre, la clôture intégrale de A est définie comme la fermeture intégrale de A dans son corps des fraction. A est dit intégralement clos si la clôture intégrale de $A = A$

<u>Définition</u> On dit qu'un schéma X est normal si, pour tout point $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre et intégralement clos.

<u>Remarque</u> ① Soit A un anneau intègre. Si A est factoriel, alors il est intégralement clos.

<u>Preuve</u> Tout élément $\alpha \in \mathrm{Frac}(A)$ s'écrit sous la forme a/b où a et b n'ont pas de facteur irréductible commun. S'il existe $a_1, \dots, a_n$ dans A tels que $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0$, alors $a^n + ba_1a^{n-1} + \dots + b^n a_n = 0$ Donc $b \mid a^n \Rightarrow b$ inversible.

② Si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{m}$ est intégralement clos, alors A est intégralement clos. $(A = \bigcap_\mathfrak{m} A_\mathfrak{m})$. En particulier, un schéma quasi-compact X est normal ssi $\forall x$ point fermé, $\mathcal{O}_{X,x}$ est int^t clos.