Hauteur d'une sous-variété

Soient X une variété arithmétique et $\bar{L}$ un fibré inversible hermitien sur X. On définit pour chaque sous-schéma irréductible Y de X un nombre réel $h_{\bar{L}}(Y)$ d'une façon récursive :

① Si $\dim(Y) = 0$, alors Y est un point fermé $\{y\}$

$$h_{\bar{L}}(Y) := \log \# \kappa(y)$$

$\kappa(y)$ corps résiduel.

② Si $\dim(Y) > 0$. On prend une section rationnelle s de $L|_Y$. On écrit $\mathrm{div}(s)$ comme $\sum_\alpha n_\alpha Y_\alpha$

avec Y_α intègre de codimension 1 dans Y.

les hauteurs $h_{\bar{L}}(Y_\alpha)$ sont bien définies (par l'hypothèse de récurrence)

on définit

$$h_{\bar{L}}(Y) = \sum_\alpha n_\alpha h_{\bar{L}}(Y_\alpha) - \int_{Y(\mathbb{C})} \log\|s\| \, c_1(\bar{L})^{\dim Y_{\mathbb{C}}}.$$

③ Si $h_{\bar{L}}(Y)$ est bien définie pour les sous-schémas fermé intègre de dimension r, on peut étendre la définition de $h_{\bar{L}}(Y)$ pour les cycles de dimension r dans X.

Si $[Z] = \sum_\alpha n_\alpha Y_\alpha$ est un cycle de dimension r,

alors $h_{\bar{L}}([Z]) = \sum_\alpha n_\alpha h_{\bar{L}}(Y_\alpha)$.

<u>Proposition</u> On a

$$h_{\bar{L}}(X) = \widehat{\deg}\left(\hat{c}_1(\bar{L})^{\dim X} \cdot [X]\right).$$

(cf. Bost-Gillet-Soulé).

Exemple. Si x est un point fermé de $X_{\mathbb{Q}}$, alors x s'étend en un morphisme $P_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \longrightarrow X$ où K est un corps de nombres. On a

$$h_L(x) = \widehat{\deg}\left(P_x^*(\overline{L})\right)$$

- Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel hermitien sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. $X = \mathbb{P}(E)$, $L = \mathcal{O}_E(1)$ faisceau universel.

On munit L des métrique de Fubini-Study.

$X^{an}(\mathbb{C}) = \coprod_{\sigma : K \to \mathbb{C}} X_\sigma^{an}(\mathbb{C})$, où $X_\sigma^{an}(\mathbb{C})$ est l'espace analytique associé à $X \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K,\sigma}} \mathbb{C}$

Si x est un point complexe dans $X_\sigma^{an}(\mathbb{C})$, x correspond à un morphisme de schémas

$$\operatorname{Spec} \mathbb{C} \longrightarrow$$

qui correspond à un espace quotient de rang 1 de $E \otimes_{\mathcal{O}_{K,\sigma}} \mathbb{C}$

$$E \otimes_{\mathcal{O}_{K,\sigma}} \mathbb{C} \longrightarrow L_{|x}.$$

On munit $L_{|x}$ de la métrique quotiente (la structure de fibré vectoriel hermitien confie à $E \otimes_{\mathcal{O}_K, \sigma} \mathbb{C}$ une norme hermitienne $\|\cdot\|_\sigma$. Donc la norme quotient est bien définie.

Si $P : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \longrightarrow X$ est un $\mathcal{O}_K$-point de X, alors $\widehat{\deg}(P^*\overline{L})$ est la hauteur de P.

Remarque Si $\overline{E}$ est semi-stable de degré 0. alors pour tout $\mathcal{O}_K$-point P de X, on a

eg. $\overline{E} = \overline{\mathcal{O}_X}^{\oplus r}$

$$h_{\overline{L}}(P) \geqslant 0$$

Théorie de hauteur de Weil

(1) le cas de $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$

Un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$ s'écrit sous la forme

$P = (x_0 : \cdots : x_n)$ où $x_0, \ldots, x_n$ sont entiers

$\mathrm{pgcd}(x_0, \ldots, x_n) = 1$

alors $H(P) := \max(|x_0|, \ldots, |x_n|)$

Northcott : L'ensemble $\{P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) \mid H(P) \leq B\}$ est fini ($B \in \mathbb{R}$).

version logarithmique

$$h(P) = \log H(P)$$

une autre interprétation :

$$h(P) = \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \log \max(|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v)$$

L'avantage de cette interprétation :

Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \neq 0$, on a

$$\sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \log \max(|\lambda x_0|_v, \ldots, |\lambda x_n|_v) = \sum_{v \in M_{\mathbb{Q}}} \log \max(|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v)$$

(2) Si K est un corps de nombre, on définit une fonction de hauteur

$$h_K : \mathbb{P}^n(K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que, si $P = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$, alors

$$h_K(P) := \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \max(|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v).$$

Remarque Si K'/K est une extension de corps de nombres, alors

$$h_{K'}(P) = [K' : K]\, h_K(P) \quad \text{pour tout } P \in \mathbb{P}^n(K)$$

$\rightsquigarrow$ fonction de hauteur absolue

$$h : \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\forall \ P \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $P = (x_0 : \cdots : x_n)$ $x_0, \ldots, x_n \in K$ corps de nombres

$$h(P) := \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v).$$

Relation avec la hauteur Arakelovienne :

Soit $E = \mathcal{O}_K^{\oplus(n+1)}$. Pour toute place $v \in M_{K,\infty}$, on munit $E \otimes_{\mathcal{O}_K} K_v$ d'une norme $\|\cdot\|_v$ (non nécessairement hermitienne)

Cela induit une métrique continue sur $\mathcal{O}_E(1)$ (via l'homomorphisme surjectif universel $\pi^*(E) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_E(1)$ où $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est le morphisme structurel).

Soit $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.

Soit $(e_0^\vee, \ldots, e_n^\vee)$ la base duale de $E^\vee$.

Si P est un point rationnel de $\mathbb{P}(E)_K$, alors P se relève en une $\mathcal{O}_K$-section de $\mathbb{P}(E)$ (que l'on note encore comme P).

$P^*\mathcal{O}_E(1)$ est un quotient de rang 1 de E, qui correspond à un sous-espace de rang 1 de $E^\vee$.

On choisit un élément ξ dans $E^\vee$ t.q. $K\xi$ est le sous-espace vectoriel de rang 1 de $E_K^\vee$ correspondant à $P^*\mathcal{O}_E(1)$.

On a

$$\widehat{\deg}(P^*\mathcal{O}_E(1)) = \sum_{v \in M_K} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \|\xi\|_v^\vee$$

norme duale.

Si on prend

$\|\cdot\|_v$ telle que $\|x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n\|_v = \sum_{i=0}^{n} |x_i|_v$

pour toute v place archimédienne.

alors, pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ on a

$$\| x_0 e_0^\vee + \cdots + x_n e_n^\vee \|_v^\vee = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i|_v$$

$$\rightsquigarrow h_{\overline{\mathcal{O}_E(1)}}(P) = h_K(P).$$

- Le choix hermitien :

$$\| x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n \|_v = \left(\sum_{i=0}^n |x_i|_v^2 \right)^{1/2}$$

$$\rightsquigarrow \| x_0 e_0^\vee + \cdots + x_n e_n^\vee \|_v^\vee = \left(\sum_{i=0}^n |x_i|_v^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow h_{\overline{\mathcal{O}_E(1)}}(P) = \sum_{v \in M_{K,f}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \max(|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v)$$

$P = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}(E)(K)$

$$+ \sum_{v \in M_{K,\infty}} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \sqrt{|x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

<u>Discussion pour les places finies</u>

Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de K, pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in K_{\mathfrak{p}}^{n+1}$, on a

$$\| x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n \|_{\mathfrak{p}} = \max(|x_0|_{\mathfrak{p}}, \ldots, |x_n|_{\mathfrak{p}})$$

la norme induite par la structure de $\mathcal{O}_K$-module sur E.

de même

$$\| x_0 e_0^\vee + \cdots + x_n e_n^\vee \|_{\mathfrak{p}} = \max(|x_0|_{\mathfrak{p}}, \ldots, |x_n|_{\mathfrak{p}}).$$

<u>Références</u> :

Théorie d'intersection arithmétique :

Gillet - Soulé : Arithmetic intersection theory Publ. IHES 72 (1990) 94-174

——— An arithmetic Riemann-Roch theorem Invent. Math. 110 (1992), 473-543

Hauteur de Weil

M. Hindry, J. Silverman, Diophantine geometry GTM 201

Hauteur d'Arakelov

BGS Heights of projective varieties and positive Green forms

Méthode de pentes

Bost, Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. Publ. IHES 93 (2001), 161-221.

Géométrie analytique

Demailly, Complex analytic and differential geometry, disponible sur la page web de l'auteur.