Variété torique

Soit $r \geq 1$ un entier

Fixons un $\mathbb{Z}$-module libre N de rang r. Soit $M = N^\vee$

On appelle cône polyhedral fortement convexe tout sous-ensemble de $N_\mathbb{R}$ de la forme

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} x_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} x_n \quad \text{avec } x_1, \ldots, x_n \in N$$

qui vérifie la condition suivante : $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$.

(σ ne contient aucune droite)

$\dim(\sigma)$ = le rang du sous-espace vectoriel de $N_\mathbb{R}$ engendré par σ

Cône dual

$$\sigma^\vee = \{ x \in M_\mathbb{R} \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ pour tout } y \in \sigma \}$$

On appelle éventail dans N toute famille non-nulle Δ de cônes polyhedraux fortement convexes dans $N_\mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes :

(1) toute face d'un $\sigma \in \Delta$ est encore dans Δ

(Si σ est un cône polyhedral fortement convexe, $\tau \subset \sigma$ est appelé une face de σ s'il existe $m \in \sigma^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap \{m\}^\perp$)

(2) Si σ et σ' sont deux cônes dans Δ, alors $\sigma \cap \sigma'$ est une faces commune de σ et σ'.

Support d'un éventail : $|\Delta| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$.

Soit σ un cône polyhedral fortement convexe.

$S_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ est un sous-semi-groupe de M qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $0 \in S_\sigma$ (ii) S_σ est engendré par un nombre fini d'éléments

(iii) M est engendré par S_σ comme un groupe.

(iv) si $n\alpha \in S_\sigma$ avec $n \geq 1$, alors $\alpha \in S_\sigma$ (S_σ est saturé)

Réciproquement, si S est un sous-semi-groupe de M qui vérifie ces conditions, alors il existe un unique cône polyhedral fortement convexe σ tel que $S = S_\sigma$.

eg. Si σ est un cône polyhédral fortement convexe et si τ est une face de σ, alors il existe $\alpha \in S_\sigma$ tel que

$$\tau = \sigma \cap \{\alpha\}^\perp \qquad S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\alpha)$$

eg. Si σ et σ' sont deux cônes polyhédral fortement convexes, et si $\tau = \sigma \cap \sigma'$ est une face commune de σ et σ', alors

$$S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$$

Schémas torique :

On fixe un anneau A. Pour tout cône polyhédral fortement convexe σ, soit X_σ le A-schéma $\mathrm{Spec}(A[S_\sigma])$

eg. Si $\sigma = \{0\}$, alors $M = S_\sigma$. $A[S_\sigma] = A[T_1^{\pm 1}, \dots, T_r^{\pm 1}]$

$$\Rightarrow X_{\{0\}} = \mathbb{G}_{m,A}^r$$

eg. Si $\sigma = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_i \geq 0 \ \forall i\}$.

alors $S_\sigma = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \mid \alpha_i \geq 0 \ \forall i\} \subset \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow A[S_\sigma] = A[T_1, \dots, T_r]$$

$$\rightarrow X_\sigma = \mathbb{A}_A^r .$$

Si $\sigma \subset \sigma'$, alors $S_\sigma \supset S_{\sigma'}$, donc on a un homomorphisme canonique de X_σ vers $X_{\sigma'}$.

- comme S_σ est saturé et engendre M comme un groupe, une localisation de $A[S_\sigma]$ coïncide avec $A[T_1^{\pm 1}, \dots, T_r^{\pm 1}]$, donc $X_{\{0\}} \subset X_\sigma$ est une immersion ouverte.
- plus généralement, si τ est une face de σ, alors le morphisme canonique $X_\tau \longrightarrow X_\sigma$ est une immersion ouverte.
- Si A est un corps, alors $A[S_\sigma]$ est un anneau intégralement clos. En particulier, X_σ est un schéma intègre et normal (Si σ est engendré par $v_1, \dots, v_r$, $\tau_i = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$, alors $A[S_\sigma] = \bigcap_{r \geq i \geq 1} A[S_{\tau_i}]$)

Soit Δ un éventail dans N.

Si σ et σ' sont deux cônes dans Δ, alors $\tau = \sigma \cap \sigma'$ est une face commune dans σ et σ'. En particulier, $S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$

Donc $A[S_\sigma] \otimes A[S_{\sigma'}] \longrightarrow A[S_\tau]$ est surjectif

$\rightsquigarrow$ $X_\tau \longrightarrow X_\sigma \times_A X_{\sigma'}$ est une immersion fermée.

Par recollement on obtient un A-schéma que l'on note X_Δ

On a une action de $X_{\{0\}} = \mathbb{G}^r_{m,A}$ sur X_Σ, qui correspond à

$$A[S_\sigma] \longrightarrow A[S_\sigma] \otimes A[\underset{\underset{M}{\shortparallel}}{S_{\{0\}}}]$$

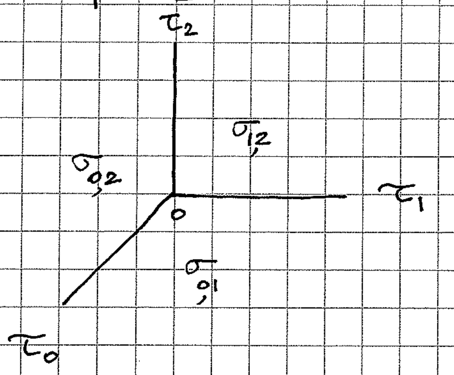
<u>Exemple</u> (1) $r=1$ $\quad \Delta = \left(\{0\},\ \sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot 1 \quad \sigma_{-1} = \mathbb{R}_{\geq 0}\cdot(-1)\right)$

$X_{\sigma_1} = \operatorname{Spec} A[T] \qquad X_{\sigma_{-1}} = \operatorname{Spec} A[T^{-1}]$

$X_{\{0\}} = \operatorname{Spec} A[T, T^{-1}]$

$\rightsquigarrow X_\Delta = \mathbb{P}^1$

(2) $r = 2$



$\Delta = \Big(\{0\},\ \sigma_{0,1} = \{(x,y) \mid y \leq \min(0,x)\}$

$\sigma_{0,2} = \{(x,y) \mid x \leq \min(0,y)\}$

$\sigma_{1,2} = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$\tau_0 = \mathbb{R}_{\geq 0}(-1,-1)$

$\tau_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}(1,0)$

$\tau_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}(0,1) \Big)$

$A[S_{1,2}] = A[T_1, T_2] \qquad X_{\sigma_{1,2}} = \operatorname{Spec} A[x, y]$

$S_{0,1} = \mathbb{Z}_{\geq 0}(1,-1) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(0,-1) \qquad S_{0,2} = \mathbb{Z}_{\geq 0}(-1,1) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-1,0)$

$X_{\sigma_{0,1}} = \operatorname{Spec} A[xy^{-1}, y^{-1}] \qquad X_{\sigma_{0,2}} = \operatorname{Spec} A[x^{-1}, yx^{-1}]$

Changement de variable : $x = \frac{T_1}{T_0}$, $y = \frac{T_2}{T_0}$ (pour rendre la situation homogène)

$\rightsquigarrow X_{\sigma_{1,2}} = \operatorname{Spec} A\left[\frac{T_1}{T_0}, \frac{T_2}{T_0}\right] \quad X_{\sigma_{0,1}} = \operatorname{Spec} A\left[\frac{T_1}{T_2}, \frac{T_0}{T_2}\right] \quad X_{\sigma_{0,2}} = \operatorname{Spec} A\left[\frac{T_0}{T_1}, \frac{T_2}{T_1}\right]$

$\rightsquigarrow X_\Delta = \mathbb{P}^2_A$.

Fait : ① X_Δ est un schéma propre sur Spec A si et seulement si $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$

② Si A est un corps, alors X_Δ est régulier si et seulement si tout cône $\sigma \in \Sigma$ est engendré par une partie d'une base de N sur $\mathbb{Z}$.

Dans la suite, on suppose que $A = K$ est un corps. On se donne un éventail Δ.

Définition On appelle diviseur de Cartier torique sur X_Δ tout diviseur de Cartier sur X_Δ qui est invariant par l'action du tore dans X_Δ ($= X_{\{0\}}$).

Comment construire un diviseur de Cartier :

On appelle fonction de support virtuelle sur Δ toute fonction continue $\psi : |\Delta| \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que, $\forall \sigma \in \Delta$, la restriction de ψ à σ coïncide à une forme linéaire $\underbrace{\text{dans}}_{m_\sigma}$ M. (m_σ est unique à un élément dans $\sigma^\perp$ près).

Pour $m = (a_1, \dots, a_r) \in M$, on désigne par T^m l'élément $T_1^{a_1} \dots T_r^{a_r}$ dans $K[M]$. C'est une fonction rationnelle sur X_Δ

- T^m est une fonction régulier sur X_σ si $m \in S_\sigma$
- T^m est inversible sur X_σ si m et $-m$ sont dans S_σ (en particulier, si $m \in \sigma^\perp$, alors T^m est inversible sur X_σ).
- Si σ et σ' sont deux cônes dans Δ, $\tau = \sigma \cap \sigma'$ (est une face commune de σ et σ'), alors $m_\sigma - m_{\sigma'} \in \tau^\perp$ donc $T^{m_\sigma} / T^{m_{\sigma'}}$ est inversible sur X_τ.

Par recollement, on obtient un diviseur de Cartier que l'on note D_ψ. C'est un diviseur de Cartier torique.

Réciproquement, un diviseur de Cartier torique provient nécessairement d'une fonction de support virtuelle.

Définition Soit $\psi : N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que ψ est concave si, pour tous $x, y \in N_{\mathbb{R}}$, et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\psi(tx + (1-t)y) \geqslant t\,\psi(x) + (1-t)\,\psi(y).$$

Fait : Soit $\psi : \underset{|\Delta|}{\overset{}{N_{\mathbb{R}}}} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de support virtuelle. ($N_{\mathbb{R}} = |\Delta|$)

Le diviseur D_ψ est sans point de base si et seulement si ψ est une fonction concave.

Dans la suite, on suppose systématiquement que $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$.
On appelle fonction de support toute fonction de support virtuelle qui est concave sur $N_{\mathbb{R}}$.

Polytope associé à une fonction de support :

$$P_\psi = \{ \alpha \in M_{\mathbb{R}} \mid \psi(u) \leqslant \alpha(u), \quad \forall u \in N_{\mathbb{R}} \}.$$

On a

$$H^0(X_\Delta, \mathcal{O}(D_\psi)) = \bigoplus_{m \in P_\psi \cap M} K \cdot T^m$$

(le éléments dans $P_\psi \cap M$ forment une base de $H^0(X_\Delta, \mathcal{O}(D_\psi))$.)

Fait : $\mathcal{O}(D_\psi)$ est ample si et seulement si ψ est strictement ($\forall\, \sigma, \sigma' \in \Delta$ de dimension r, on a $m_\sigma \neq m_{\sigma'}$)

Dans ce cas-là, on peut reconstruire (l'éventail +) fonction de support à partir d'un polytope P dont les sommets sont des points de réseau.

En particulier $\psi(x) = \min\limits_{\alpha \in P \cap M} \alpha(x) = \min\limits_i \alpha_i(x)$

où (α_i) sont des sommets de P.

Relation entre l'addition et ces constructions.

Supposons que ψ et ψ' sont deux fonctions de support, alors $\psi+\psi'$ l'est aussi. De plus, on a

$$D_{\psi+\psi'} = D_{\psi} + D_{\psi'}$$

$$P_{\psi+\psi'} = P_{\psi} + P_{\psi'} \quad \text{(somme de Minkowski)}$$

$$= \{\alpha+\beta \mid \alpha\in P_{\psi},\ \beta\in P_{\psi'}\}.$$

<u>Fonction volume</u>

Soient X un schéma projectif intègre de dimension r défini sur un corps K et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle volume de L le nombre réel

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathrm{rg}_K(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^r/r!}$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, si L est ample, alors on a $\mathrm{vol}(L) = \deg(c_1(L)^r \cap [X])$. (qui est homogène de degré r par rapport à L).

Dans le cas d'une variété torique, on peut interpréter le volume d'un diviseur (ou faisceau inversible) par le volume (par rapport à la mesure de Lebesgue) d'un corps convexe.

<u>Proposition</u>

Soit P un corps convexe dans $M_{\mathbb{R}}$ (P est un sous-ensemble fermé convexe tel que $\mathring{P}$ soit non-vide). Soit μ la mesure de Haar sur $M_{\mathbb{R}}$ telle que l'espace quotient $M_{\mathbb{R}}/M$ (qui est compact) soit de volume 1. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#(nP\cap M)}{n^r} = \mu(P).$$

<u>Corollaire</u> Soit Δ un éventail tel que $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$.
Si ψ est une fonction de support sur $N_{\mathbb{R}}$, alors on a
$$\mu(P_\psi) = (r!)^{-1} \operatorname{vol}(D_\psi)$$
Sur le cône ample, on peut calculer le nombre d'intersection par les nombre d'autointersection.

<u>exemple</u> Si X est un schéma projectif et intègre de dimension 2 sur $\operatorname{Spec} K$, et si L_1, L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles, alors
$$\deg\big(c_1(L_1)\cdot c_1(L_2)\cap[X]\big) = \frac{1}{2}\Big[\deg\big(c_1(L_1\otimes L_2)^2\cap[X]\big) - \deg\big(c_1(L_1)^2\cap[X]\big) - \deg\big(c_1(L_2)^2\cap[X]\big)\Big].$$
Inspiré par cette observation, on définit le volume mixte de r faisceaux inversibles $L_1, \dots, L_r$ sur un schéma projectif et intègre de dimension r comme
$$\operatorname{vol}_{mix}(L_1, \dots, L_r) = \frac{1}{r!}\Big(\operatorname{vol}(L_1\otimes\cdots\otimes L_r) - \sum_{i=1}^{r}\operatorname{vol}(L_1\otimes\cdots\otimes\widehat{L_i}\otimes\cdots\otimes L_r)$$
$$+ \sum_{1\leq i<j\leq r}\operatorname{vol}(L_1\otimes\cdots\otimes\widehat{L_i}\otimes\cdots\otimes\widehat{L_j}\otimes\cdots\otimes L_r) - \cdots + (-1)^{r-1}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{vol}(L_i)\Big)$$

<u>Remarque</u> Si $L_1, \dots, L_r$ sont amples, alors
$$\operatorname{vol}_{mix}(L_1, \dots, L_r) = \deg\big(c_1(L_1)\cdots c_1(L_r)\cap[X]\big)$$
C'est une forme multi-linéaire sur le cône des faisceaux inversibles amples et symétrique

① pour toute permutation $\sigma : \{1, \dots, r\} \circlearrowleft$
$$\operatorname{vol}_{mix}(L_{\sigma(1)}, \dots, L_{\sigma(r)}) = \operatorname{vol}_{mix}(L_1, \dots, L_r)$$
② Si a et b sont deux entiers ≥ 1, $L_1, M_1, L_2, \dots, L_r$ sont des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles amples, on a
$$\operatorname{vol}_{mix}(L_1^{\otimes a}\otimes M_1^{\otimes b}, L_2, \dots, L_r) = a\operatorname{vol}_{mix}(L_1, L_2, \dots, L_r) + b\operatorname{vol}_{mix}(M_1, L_2, \dots, L_r)$$

La deuxième propriété n'est pas toujours vérifiée pour des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles non-amples.

À l'aide de la géométrie convexe, on peut étudier les faisceaux inversibles sur les variétés toriques.

① Inégalité de Brunn-Minkowski.

Soient K_1 et K_2 deux corps convexes dans $M_{\mathbb{R}}$, et $\varepsilon \in [0,1]$. alors on a

$$\mu(\varepsilon K_1 + (1-\varepsilon) K_2)^{1/r} \geq \varepsilon \mu(K_1)^{1/r} + (1-\varepsilon) \mu(K_2)^{1/r}$$

Si on prend $\varepsilon = 1/2$, on obtient

$$\mu(K_1 + K_2)^{1/r} \geq \mu(K_1)^{1/r} + \mu(K_2)^{1/r}$$

② Volume mixte

Si $K_1, \dots, K_r$ sont r corps convexes dans $M_{\mathbb{R}}$ on définit

$$V(K_1, \dots, K_r) = \frac{1}{r!}\left(\sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} \mu(K_{i_1} + \dots + K_{i_k})\right)$$

- c'est une forme symétrique et positive multilinéaire (par rapport à la somme de Minkowski)

<u>Inégalité de Alexandrov-Fenchel</u> $(r \geq 2)$

$$V(K_1, \dots, K_r)^2 \geq V(K_1, K_1, K_3, \dots, K_r)\, V(K_2, K_2, K_3, \dots, K_r)$$