Approximation d'une variété projective par une variété torique

K corps. X schéma projectif intègre sur $\operatorname{Spec} K$.

On suppose donné un point rationnel régulier $x \in X(K)$.

$\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x. C'est un anneau local régulier

$\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

- $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est un espace vectoriel de dimension d sur $K (\cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x)$ où d est la dimension de Krull de X.

- $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $K[\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2]$.

Choisissons une base $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_d)$ de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on écrit $\bar{z}^\alpha := \bar{z}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{z}_d^{\alpha_d}$.

L'ensemble des monômes est muni de la relation d'ordre lexicographique (ou des puissances)

$\alpha \geqslant \beta$ si et seulement si $\exists\, i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que

$$\alpha_j = \beta_j \quad \text{pour } j \leqslant i$$
$$\alpha_{i+1} > \beta_{i+1} \quad (\text{lorsque } i < d).$$

Propriété de la relation d'ordre lexicographique :

Si $\alpha \geqslant \beta$ et $\alpha' \geqslant \beta'$, alors $\alpha + \alpha' \geqslant \beta + \beta'$.

Si α, α', β sont trois éléments dans $\mathbb{N}^d$, on a

$$\alpha \geqslant \alpha' \iff \alpha + \beta \geqslant \alpha' + \beta.$$

Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors l'application d'évaluation

$$H^0(X, L) \longrightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x}$$

est injectif.

Quitte à choisir une trivialisation de L autour de x, on peut identifier $L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x}$ à $\mathcal{O}_{X,x}$.

$\mathbb{N}^d$-filtration sur $\mathcal{O}_{X,x}$: on prend une famille $(z_i)_{i=1}^d$ d'éléments dans $\mathfrak{m}_x$ dont les images dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ sont $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_d$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$. on définit
$$\mathcal{F}^\alpha(\mathcal{O}_{X,x}) = \sum_{\beta \geq \alpha} K \cdot z^\beta$$
où pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$, $z^\beta = z_1^{\beta_1} \dots z_d^{\beta_d}$

$\mathcal{F}^\alpha(\mathcal{O}_{X,x})$ est un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$. (il faut passer par le complété formel et le théorème de Cohen)

On désigne par $Gr^\cdot(\mathcal{O}_{X,x})$ l'anneau gradué associé :
$$gr^\alpha(\mathcal{O}_{X,x}) := \sum_{\beta \geq \alpha} K \cdot z^\beta \Big/ \sum_{\beta > \alpha} K \cdot z^\beta$$
C'est une K-algèbre $\mathbb{N}^d$-graduée qui est un anneau intègre.

<u>filtration induite</u>

Si V est un sous-espace vectoriel de $H^0(X, L)$ alors la filtration $\mathcal{F}$ induit une $\mathbb{N}^d$-filtration sur V. (que l'on notera encore comme $\mathcal{F}$).

Pour $s \in V$ on note
$$\mathrm{ord}(s) := \sup \{ \alpha \in \mathbb{N}^d \mid s \in \mathcal{F}^\alpha V \} \in \mathbb{N}^d \cup \{\infty\}.$$
$\mathrm{ord}(s + s') \geq \min(\mathrm{ord}(s), \mathrm{ord}(s'))$ pour s, s' dans V.

<u>Remarque</u> L'inclusion $V \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ dépend du choix de la trivialisation locale de L en x, or la filtration induite. Cependant, la filtration induite ne dépend pas de ce choix.

Si L_1 et L_2 sont deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles et si $s_i \in H^0(X, L_i)$ $(i = 1, 2)$, alors $\mathrm{ord}(s_1 s_2) = \mathrm{ord}(s_1) + \mathrm{ord}(s_2)$

Donc la fonction ord se comporte comme une valuation.

<u>filtration induite sur un système linéaire gradué</u>

$$V_\cdot \subset \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L^{\otimes n}) \quad \text{sous-algèbre graduée.}$$

chaque V_n est muni d'une $\mathbb{N}^d$-filtration qui est compatible à la graduation $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\bigoplus_{n \geq 0} gr^\cdot(V_n)}_{gr^\cdot(V_\cdot)}$ est une K-algèbre $\mathbb{N}^{d+1}$-graduée.

Fait ① $\mathrm{gr}^{\bullet}(V_\bullet)$ est un anneau intègre

② pour tout $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^{d+1}$, $\mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet)$ est un espace vectoriel de dimension 0 ou 1 sur K.

Semi-groupe associé à un système linéaire gradué.

$$\Gamma(V_\bullet) := \{(n, \alpha) \mid \mathrm{gr}^{(n,\alpha)}(V_\bullet) \neq \{0\}\}$$
$$= \bigcup_{n \geq 0} \{(n, \alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Im}(\mathrm{ord}|_{V_n \setminus \{0\}})\}.$$

C'est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}^{d+1}$.

Pour tout entier $n \geq 0$ on désigne par $\Gamma_n(V_\bullet)$ la tranche du niveau n :
$$\Gamma_n(V_\bullet) = \{(n, \alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Im}(\mathrm{ord}|_{V_n \setminus \{0\}})\}$$
$$(= \Gamma(V_\bullet) \cap (\{n\} \times \mathbb{N}^d)).$$

Proposition
$$\dim_K(V_n) = \# \Gamma_n(V_\bullet).$$

On définit le volume de $V_\bullet$ comme
$$\mathrm{vol}(V_\bullet) := \limsup_{n \to \infty} \frac{\dim_K(V_n)}{n^d/d!}$$

Corps d'Okounkov
$$\Delta(V_\bullet) := (\{1\} \times \mathbb{R}^d) \cap \left(\overbrace{\text{Cône engendré}}^{\text{convexe}} \text{ par } \Gamma(V_\bullet)\right)$$

C'est un corps convexe dans $\mathbb{R}^d$.

Proposition Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ qui engendre $\mathbb{Z}^d$ comme un groupe. Il existe une constante C qui vérifie la propriété suivante.

pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ tels que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \in \mathbb{Z}^d$, il existe des entiers $(n_1, \dots, n_m)$ tels que $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = n_1 a_1 + \dots + n_m a_m$ et que
$$\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i - n_i| < C.$$

Preuve sans perte de généralité, on peut supposer $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ et que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ pour tout i.

Soit $\Theta = \{ (\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m) \mid 0 \leq \mu_i \leq 1 \} \cap \mathbb{Z}^d$

C'est un ensemble discret et borné, donc fini.

En outre, pour tout $x \in \Theta$ on choisit $(n_1(x), \ldots, n_m(x)) \in \mathbb{Z}^m$ tels que $x = \sum_i n_i(x)\, a_i$ (Cela est toujours possible car $\mathbb{Z}^d$ est engendré comme groupe par A)

Soit $C = m + \max_{x \in \Theta} \sum_{i=1}^m |n_i(x)|$. alors C vérifie la condition de la proposition.

<u>Corollaire</u> On garde la notation de la proposition.

Soit $\Gamma(A)$ le semi-groupe engendré par A

Soit $\Sigma(A)$ le cône dans $\mathbb{R}^n$ engendré par A.

Soit $x = C \sum_{a \in A} a$.

Alors $(\Sigma(A) + x) \cap \mathbb{Z}^d \subset \Gamma(A)$.

<u>Preuve</u> Soit $y \in \Sigma(A)$ tel que $y + x \in \mathbb{Z}^d$.

On suppose $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ et y peut ainsi s'écrire comme

$$y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m \quad \text{avec } \lambda_i \geq 0.$$

ainsi $y + x = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + C)\, a_i$.

D'après la proposition, il existe des entiers $n_1, \ldots n_m$ tels que

$$y + x = \sum_{i=1}^m n_i a_i \quad \text{et que} \quad \sum_{i=1}^m |n_i - \lambda_i - C| \leq C$$

Donc on a $n_i \geq 0$ pour tout i.

<u>Lemme</u> Soit $\Gamma \subset \mathbb{N}^{d+1}$ un sous-semigroupe qui engendre $\mathbb{Z}^{d+1}$ comme un groupe. Pour tout m, soit $\Gamma_m = \Gamma \cap (\{m\} \times \mathbb{N}^d)$. Alors pour m suffisamment grand, Γ_m engendre $\mathbb{Z}^d$ comme un groupe.

<u>Démonstration</u>

On peut supposer Γ de type fini.

Soit Σ le cône engendré par Γ.

Comme Γ engendre $\mathbb{Z}^{d+1}$ comme un groupe, on a l'existence de $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$(\Sigma + \gamma) \cap \mathbb{N}^{d+1} \subset \Gamma$$

En outre, l'intérieur de Σ est un cône ouvert non-vide. on obtient alors que $(\Sigma + \gamma)_m$ contient une boule ouverte de rayon assez grand lorsque m est assez grand. Le résultat est ainsi démontré. *

<u>Proposition</u> Soit $\Gamma \subset \mathbb{N}^{d+1}$ un sous-semi-groupe qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $\Gamma_0 = \{0\}$

(2) il existe des vecteurs de la forme $((1, a_i))_{i=1}^{n}$ tel que Γ soit contenu dans le monoïde engendré par cette famille de vecteurs

(3) Γ engendre $\mathbb{Z}^{d+1}$ comme un groupe.

Soit Σ le cône engendré par Γ et $\Delta = \Sigma_1$ $(= (\{1\} \times \mathbb{R}^d) \cap \Sigma)$

Alors

(a) on a $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{\# \Gamma_m}{m^d} = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta)$

(b) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p_0 = p_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout entier $p \geq p_0$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\#(\underbrace{\Gamma_p + \cdots + \Gamma_p}_{k \text{ copies}})}{(kp)^d} \geq \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta) - \varepsilon .$$

<u>Démonstration</u>

(a) D'abord on a $\Gamma_m \subset m\Delta \cap \mathbb{Z}^d$. et $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{\#(m\Delta \cap \mathbb{Z}^d)}{m^d} = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta)$

donc $\displaystyle\limsup_{m \to +\infty} \frac{\# \Gamma_m}{m^d} \leq \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta)$.

Supposons que Γ est de type fini. Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $(\Sigma + \gamma) \cap \mathbb{N}^{d+1} \subset \Gamma$. Or

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\#\left((\Sigma+\gamma) \cap (\{m\} \times \mathbb{N}^d)\right)}{m^d} = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta).$$

Donc $\displaystyle \liminf_{m \to \infty} \frac{\#\Gamma_m}{m^d} \geq \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta)$.

En général, on peut construire une famille croissante

$$\Gamma^{(1)} \subset \Gamma^{(2)} \subset \cdots$$

de sous-semi-groupes de type fini qui satisfont aux conditions (1)–(3). Pour tout i, on construit $\Delta^{(i)} \subset \mathbb{R}^d$ à partir de $\Gamma^{(i)}$. D'après le résultat déjà obtenu, on a

$$\liminf_{m \to \infty} \frac{\#\Gamma_m}{m^d} \geq \liminf_{m \to \infty} \frac{\#\Gamma_m^{(i)}}{m^d} = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^{(i)}).$$

Comme $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^{(i)})$ converge vers $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta)$, on obtient le résultat.

Traitons d'abord le cas où Γ est de type fini

(b) Pour tout entier p, soit Θ_p l'enveloppe convexe engendré par Γ_p.

Comme $(\Sigma + \gamma) \cap \mathbb{N}^{d+1} \subset \Gamma$, on obtient

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Theta_p)}{p^d} = \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta).$$

En outre, $\displaystyle \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Theta_p) = \lim_{k \to \infty} \frac{\#(\overbrace{\Gamma_p + \cdots + \Gamma_p}^{k \text{ copies}})}{k^d}$

Donc il existe $p_0 = p_0(\varepsilon)$ tel que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\#(\underbrace{\Gamma_p + \cdots + \Gamma_p}_{k \text{ copies}})}{(kp)^d} \geq \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En général, on prend $\Gamma' \subset \Gamma$ de type fini vérifiant (1)–(3)

tel que $\mathrm{vol}(\Delta(\Gamma')) \geq \mathrm{vol}(\Delta(\Gamma)) - \frac{\varepsilon}{2}$.