Approximation de Fujita géométrique

Soient K un corps, X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} K$, et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On suppose que L est gros, i.e.

$$\operatorname{vol}(L) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\dim_K H^0(X, L^{\otimes m})}{m^d/d!} > 0$$

où d est la dimension de X.

Remarque Si L est ample alors $\operatorname{vol}(L) = \deg(c_1(L)^d)$

Décomposition de Zariski

On dit que la décomposition de Zariski existe pour L s'il existe un entier $p \geq 1$, un morphisme projectif et birationnel $\nu : X' \to X$ et une décomposition $\nu^* L^{\otimes p} \cong A \otimes M$ tels que

(i) A est nef (pour tout A' ample et tout entier $n \geq 1$, $A^{\otimes n} \otimes A'$ est ample)

(ii) M est effectif

(iii) $\operatorname{vol}(A) = p^d \operatorname{vol}(L)$.

Remarque 1. vol est un invariant birationnel : si $\nu : X' \to X$ est un morphisme projectif et birationnel, alors $\operatorname{vol}(L) = \operatorname{vol}(\nu^* L)$.

2. Si la décomposition de Zariski existe, alors $\operatorname{vol}(L)$ est un nombre rationnel $\rightsquigarrow$ il y a des contre-exemples pour l'existence de la décomposition de Zariski

3. Connus pour les cas où
   ① X est une surface
   ② X est une variété torique

4. Même si on considère les $\mathbb{R}$-diviseurs, il y a aussi des contre-exemples.

Approximation de Fujita : version approximative de la décomposition de Zariski

Théorème (Fujita) Il existe un entier $p \geq 1$, une modification birationnelle $\nu : X' \to X$ et une décomposition $\nu^* L^{\otimes p} \cong A \otimes M$ avec A nef et M effectif tels que $\operatorname{vol}(A) \geq p^d(\operatorname{vol}(L) - \varepsilon)$.

Stratégie (Lazarsfeld-Mustață) : utiliser le corps d'Okounkov
(tel que $V_n \neq \{0\}$ pour n assez grand)

<u>Définition</u> Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué de L. On dit que $V_\bullet$ contient un diviseur ample s'il existe un entier p, un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample A et une section globale non-nulle s_0 de $L^{\otimes p} \otimes A^\vee$ tels que

$$\mathrm{Im}\left(H^0(X, A^{\otimes n}) \xrightarrow{s_0^p} H^0(X, L^{\otimes np}) \right) \subset V_{np}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exemple</u> Si $V_\bullet$ est le système linéaire total $V_\bullet(L)$, alors il contient un diviseur ample. En effet, si L est gros, alors pour tout $\mathcal{O}_X$-module inversible M, il existe un entier n_0 tel que $L^{\otimes n} \otimes M$ soit gros pour tout $n \geq n_0$.

<u>Proposition</u> Si $V_\bullet$ contient un diviseur ample, alors $\Gamma(V_\bullet)$ satisfait les conditions suivantes :

(1) $\Gamma_0(V_\bullet) = \{0\}$

(2) il existe des vecteurs de la forme $((1, a_i))_{i=1}^{n}$ tels que $\Gamma(V_\bullet)$ soit contenu dans le monoïde engendré par cette famille.

(3) $\Gamma(V_\bullet)$ engendre $\mathbb{Z}^{d+1}$ comme un groupe.

<u>Preuve</u>. (1) est trivial

(2) Comme $\Gamma(V_\bullet) \subset \Gamma(V_\bullet(L))$ il suffit de traiter le cas de $V_\bullet(L)$. Choisissons un faisceau inversible A très ample tel que $A \otimes L^\vee$ admet une section s_0 qui ne s'annule pas en x (le point régulier qui sert à calculer le corps d'Okounkov). On a

$$\Gamma(V_\bullet(L)) + \{(n, n\alpha)\} \subset \Gamma(V_\bullet(A))$$

où $\alpha = \mathrm{ord}(s_0)$. On peut donc supposer L ample.

Il existe alors un entier $b \geq 1$ tel que, pour toute section non-nulle s de $H^0(X, L^{\otimes n})$ on a $|\mathrm{ord}(s)| \leq nb$.

Par conséquent, $\Gamma(V_\bullet(A))$ est contenu dans le monoïde engendré par $(1, \beta)$ avec $|\beta| \leq b$.

(3) On prend $p \geq 1$ assez grand. A_p ample et $s_p \in \Gamma(X, L^{\otimes p} \otimes A_p^\vee)$ non-nulles tels que $\mathrm{Im}(H^0(X, A^{\otimes n}) \xrightarrow{s_p^n} H^0(X, L^{\otimes np})) \subset V_{np}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$

$\Gamma_{np}(V_\bullet)$ contient alors $(np, n\alpha_p)$, $(np, n\alpha_p + e_1)$, $\ldots$, $(np, n\alpha_p + e_d)$

où $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique, $\alpha_p = \mathrm{ord}(s_p)$

On peut aussi trouver q, m premier à np tels que

$(mq, m\alpha_q) \in \Gamma$. On obtient ainsi que Γ engendre $\mathbb{Z}^{d+1}$

comme un groupe.

<u>Démonstration</u> du théorème d'approximation de Fujita.

Soit $p \geq 1$ tel que $V_p \neq \{0\}$. On note

$$X_p = \mathrm{Proj}\left(\mathrm{Im}\left(\bigoplus_{n\geq 0} S^n(\pi^* V_p) \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} L^{\otimes np}\right)\right)$$ où $\pi : X \to \mathrm{Spec}\, K$.

et $\varphi_p : X_p \to X$ le morphisme canonique

(éclatement de X le long du lieu de base de V_p

Soit E_p le diviseur exceptionnel et s_p la section globale de $\mathcal{O}(E_p)$ qui trivialise $\mathcal{O}(E_p)$ en dehors du lieu exceptionnel.

On a $\mathcal{O}_{X_p}(1) \cong \varphi_p^*(L^{\otimes p}) \otimes \mathcal{O}(-E_p)$

faisceau universel, qui est nef ; le dual de $\mathcal{O}(E_p)$.

En outre, le morphisme canonique $\varphi_p^* \pi_*(V_p) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_p}(1)$ est surjectif

$\rightsquigarrow$ un morphisme de schéma $i_p : X_p \longrightarrow \mathbb{P}(V_p)$ tel que

$i_p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_p)}(1) \cong \mathcal{O}_{X_p}(1)$.

La restriction des sections globale de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_p)}(n)$ à X_p donne une application injective

$$\mathrm{Im}(S^n V_p \longrightarrow V_{np}) \hookrightarrow H^0(X_p, \mathcal{O}_{X_p}(n)).$$

identifié à un sous-espace de $H^0(X_p, \varphi_p^* L^n)$ via s_p

Comme le volume de $V_\bullet$ est approximable par le volume de ses sous-algèbre graduée de type fini, on a

$$\sup_p \liminf_{n\to\infty} \frac{\dim_K\left(\mathrm{Im}(S^n V_p \to V_{np})\right)}{\dim_K(V_{np})} = 1.$$

donc $$\sup_p \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{rg}\left(H^0(X_p, \mathcal{O}_{X_p}(n))\right)}{(np)^d/d!} = \mathrm{vol}(L).$$

✻

D'autres conséquence de la construction de Lazarsfeld-Mustaţă.

Théorème (Log. concavité)

Si L_1 et L_2 sont deux fibrés inversibles gros sur X, alors on a

$$\mathrm{vol}(L_1 \otimes L_2)^{1/d} \geqslant \mathrm{vol}(L_1)^{1/d} + \mathrm{vol}(L_2)^{1/d}$$

Preuve On a $\Delta(L_1 \otimes L_2) \supset \Delta(L_1) + \Delta(L_2)$

somme de Minkowski.

On peut donc appliquer le théorème de Brunn-Minkowski.

Analogue arithmétique de la fonction volume

Soient K un corps de nombre

$\pi : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ un morphisme propre et plat, avec

$\mathcal{X}$ intègre. $d = \dim \mathcal{X}_K$ (donc $\dim \mathcal{X} = d+1$)

$\overline{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien sur $\mathcal{X}$

$\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module inversible. $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in M_{K,\infty}}$ une famille de métriques continues.

Sections petites

$$\widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}) := \left\{ s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \;\middle|\; \|s\|_{\sigma,\sup} \leqslant 1 \text{ quel que soit } \sigma \right\}.$$

$\widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})$ est un sous-ensemble fini de $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L})$.

volume arithmétique de Moriwaki.

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathcal{L}}) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \# \widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}})}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

On dit que $\overline{\mathcal{L}}$ est gros si $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathcal{L}}) > 0$.

Positivité

Soit Ω un ouvert non-vide dans $\mathbb{C}$ et φ une fonction de classe C^2 sur Ω. On dit que φ est une fonction harmonique si on a $dd^c\varphi = 0$. $\left(\Delta\varphi := \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0\right)$

La formule de Cauchy montre que

$$\varphi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta}+a)\, d\theta$$

pour tout r tel que $B(a,r) \subset \Omega$

En particulier, la fonction φ n'atteint pas ses valeurs extrémales.

Si u est une fonction semi-continue supérieurement à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ telle que ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\{u(z) \geq \lambda\}$ est fermé)

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout $a \in \Omega$ et tout r tels que $B(a,r) \subset \Omega$.

on dit que u est une fonction sous-harmonique.

Fait
- Si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille décroissante de fonctions sous-harmoniques, alors $\inf_i u_i$ est sous-harmonique
- Convexité.

Si $u_1, \dots, u_n$ est une famille finie de fonctions sous-harmonique et si $C : [-\infty, +\infty[^n \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ est une fonction continue, convexe et croissante par rapport à chaque coordonné, alors $C(u_1, \dots, u_n)$ est une fonction sous-harmonique

eg. $u_1 + \dots + u_n$, $\max(u_1, \dots, u_n)$. $\log(e^{u_1} + \dots + e^{u_n})$ sont sous-harmonique.

Fonction plurisousharmonique

Soit Ω un ouvert non-vide dans $\mathbb{C}^n$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ est plurisousharmonique si elle est semi-continue supérieurement et si pour toute application affine $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, la fonction $u \circ \varphi$ est sous-harmonique sur $\varphi^{-1}(\Omega)$.

Condition équivalente : de norme 1

$\forall\ a \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{C}^n$ et $r > 0$ tels que $a + \underbrace{B(0;r)}_{\text{boule dans } \mathbb{C}}\xi \subset \Omega$,

on a

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}\cdot\xi)\, d\theta$$

- Si u est de classe C^2, alors u est plurisousharmonique si et seulement si la forme quadratique $Hu = dd^c u$ est partout semi-positive sur Ω.

En particulier, si $F : (\Omega' \subset \mathbb{C}^m) \longrightarrow \Omega$ est une application analytique et si u est une fonction plurisousharmonique, alors il en est de même de $u \circ F$. $\rightsquigarrow$ fonction psh sur une variété

- Si $r \geq 1$ est un entier, alors la fonction $\log(1 + |z|^2)$ est plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^r$

- Considérons la variété analytique associé à $\mathbb{P}(E)$ où E est un espace vectoriel de rang $r+1$ muni d'une norme hermitienne $\rightsquigarrow \|\cdot\|_{FS}$ sur $\mathcal{O}_E(1)$ (de norme 1)

Si s est une section non-nulle de $\mathcal{O}_E(1)$ (correspond à un élément non nulle de E), alors $\log\|s\|$ est une fonction sur l'ouvert X_s défini par non-annulation de s. s'identifie à $H_s = \{s\}^\perp$. Pour tout $z \in H$ la norme carrée de s_z est $(1+|z|^2)^{-1}$. $\rightsquigarrow$ $c_1(\overline{\mathcal{O}_E(1)})$ est positive en tout point de X_s.

- Plus généralement, si X est une variété analytique complexe et si (L, h) est un fibré inversible muni d'une métrique continue. On dit que h est une métrique semipositive si, pour tout ouvert U de X et toute section s de L au-dessus de U, $-\log\|s\|^2$ est une fonction plurisousharmonique sur U.

(dans le cas où h est une métrique lisse, cela revient à dire que $c_1(L, h)$ est une forme semi-positive partout.