Fibré inversible hermitien continu (arithmétiqu^t) ample

K corps de nombres.

$\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ morphisme propre et plat. $\mathcal{X}$ intègre

$d = \dim \mathcal{X}_K$.

$\overline{\mathcal{L}}$ fibré inversible hermitien (continu) sur $\mathcal{X}$.

On dit que $\overline{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement ample si

- $\mathcal{L}$ est ample
- les métriques de $\overline{\mathcal{L}}$ sont semi-positives
- $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) > 0$ pour tout point algébrique de $\mathcal{X}_K$.

Fait. ① On peut définir le nombre $\widehat{\deg}(c_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1} \cdot [\mathcal{X}]) \in \mathbb{R}$ qui est strictement positif. (que l'on notera $c_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}$)

(V. Maillot)

② Les fibrés inversibles hermitiens arithmétiquement ample forment un sous-semi-groupe de $\widehat{\operatorname{Pic}}(\mathcal{X})$ (noté comme $\widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})$)

③ On peut définir une forme $(d+1)$-linéaire sur $\widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})$ (positivement)

$$\widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})^{d+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$$
$$(\overline{\mathcal{L}}_0, \dots \overline{\mathcal{L}}_d) \longmapsto c_1(\overline{\mathcal{L}}_0) \cdots c_1(\overline{\mathcal{L}}_d)$$

④ On a, pour tout $\overline{\mathcal{L}} \in \widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \# \widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!} = c_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}.$$

(Hilbert-Samuel arithmétique. Gillet-Soulé. Abbes-Bouche ...).

⑤ On désigne par $\widehat{\operatorname{Nef}}(\mathcal{X})$ la fermeture de $\widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})$.

$\overline{\mathcal{L}} \in \widehat{\operatorname{Nef}}(\mathcal{X})$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\overline{\mathcal{M}} \in \widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})$ on a $\overline{\mathcal{L}}^{\otimes n} \otimes \overline{\mathcal{M}} \in \widehat{\operatorname{Amp}}(\mathcal{X})$. (dit nef).

$\overline{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement nef si et seulement si

- $\mathcal{L}$ est nef
- les métrique de $\overline{\mathcal{L}}$ sont semi-positives
- $h_{\overline{\mathcal{L}}}(x) \geq 0$ pour tout point algébrique de $\mathcal{X}_K$.

La forme $\overset{\text{positivement}}{\text{multilinéaire}}$ $\hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_0) \cdots \hat{c}_1(\bar{\mathcal{L}}_d)$ s'étend naturellement sur $\widehat{\mathrm{Nef}}(\mathcal{X})$. le théorème de Hilbert-Samuel est encore vrai pour les fibrés inversibles hermitiens nefs.

<u>Théorème</u> (Fujita arithmétique)

Soit $\bar{\mathcal{L}}$ un fibré inversible hermitien gros ($\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{\mathcal{L}}) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \# \hat{H}^0(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{L}}^n)}{n^{d+1}/d+1} > 0$)

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $p \geq 1$, $\nu : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$ projectif et birationnel, et une décomposition $\nu^* \bar{\mathcal{L}}^{\otimes p} \cong \bar{\mathcal{A}} \otimes \bar{\mathcal{M}}$

avec $\bar{\mathcal{A}} \in \widehat{\mathrm{Amp}}(\mathcal{X}')$ et $\hat{H}^0(\mathcal{X}', \bar{\mathcal{M}}) \neq \{0\}$ ($\bar{\mathcal{M}}$ effectif), tels que

$$(\widehat{\mathrm{vol}}(\bar{\mathcal{L}}) - \varepsilon)\, p^{d+1} \leq \widehat{\mathrm{vol}}(\bar{\mathcal{A}}).$$

La méthode géométrique ne s'applique pas directement car $\bigoplus_{n\geq 0} \hat{H}^0(\mathcal{X}, \bar{\mathcal{L}}^{\otimes n})$ n'est pas une algèbre (la somme de deux sections petites n'est pas nécessairement petite).

<u>Idée</u> : filtration par les minima (sur $L = \mathcal{L}_K$).

Soit $V_\cdot = V_\cdot(L) = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(\mathcal{X}_K, L^{\otimes n})$.

Pour chaque n, V_n est la fibre générique du fibré vectoriel normé

$$\pi_*(\bar{\mathcal{L}}^{\otimes n}) := (H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n}), (\|\cdot\|_{\sigma,\sup})) \text{ sur } \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K.$$

<u>Définition</u> Soit $\bar{\mathcal{E}}$ un fibré vectoriel normé sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. Soit $E = \mathcal{E}_K$.

On définit une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ sur E (décroissante) telle que

$$\mathcal{F}^t(E) = \mathrm{Vect}_K\left(\left\{ s \in \mathcal{E} \;\middle|\; \forall \sigma,\ \|s\|_\sigma \leq e^{-t} \right\}\right)$$

- $\mathcal{F}^t(E) = \{0\}$ pour t assez positif
- $\mathcal{F}^t(E) = E$ pour t assez négatif
- la fonction $t \longmapsto \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t(E))$ est localement constante à gauche

les points de saut pour cette filtration sont appelés des minima successifs logarithmiques de $\bar{\mathcal{E}}$, noté comme

$$\lambda_1(\bar{\mathcal{E}}) \geq \lambda_2(\bar{\mathcal{E}}) \geq \cdots \geq \lambda_{\mathrm{rk}(E)}(\bar{\mathcal{E}})$$

(on compte la multiplicité)

<u>Théorème</u> (Gillet-Soulé) Il existe une constante $C(K)$ (qui ne dépend que du corps de nombres K) tel que, pour tout fibré vectoriel normé $\bar{E}$ sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, on a

$$\left| \int_0^{+\infty} rg(\mathcal{F}^t(E))\, dt - \log \hat{H}^0(\bar{E}) \right| \leq C(K)\, rg(E) \cdot \log(rg E)$$

<u>Remarque</u>: On a $\int_0^{+\infty} rg(\mathcal{F}^t(E))\, dt = \sum_{\lambda_i(\bar{E}) \geq 0} \lambda_i(\bar{E})$

(comparer au théorème de Minkowski)

On définit $V_\cdot^t := \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{F}^{nt}(H^0(\mathcal{X}_K, L^{\otimes n}))$.

Si s_n et s_m sont deux sections de $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ et $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes m})$ telles que $\|s_n\|_{\sigma,\sup} \leq e^{-nt}$ et $\|s_m\|_{\sigma,\sup} \leq e^{-mt}$

alors $\|s_n \cdot s_m\|_{\sigma,\sup} \leq e^{-(n+m)t}$ $(*)$

$\Rightarrow$ $V_\cdot^t$ est une sous-algèbre graduée de $V_\cdot$

<u>Premier minimum asymptotique</u>

Pour tout entier $n \geq 1$, soit

$$\lambda_{max}(V_n) := \lambda_1(\pi_*(\bar{\mathcal{L}}^{\otimes n}))$$

<u>Lemme</u> La suite $(\frac{1}{n}\lambda_{max}(V_n))_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$.

<u>Démonstration</u>

D'après $(*)$, on obtient que la suite $(\lambda_{max}(V_n))_{n\geq 1}$ est suradditive. Pour montrer que $(\frac{1}{n}\lambda_{max}(V_n))_{n \geq 1}$ converge dans $\mathbb{R}$, il suffit d'établir que $\lambda_{max}(V_n)$ croît linéairement lorsque $n \to +\infty$

Minimum essentiel : $\mu_{ess}(\bar{\mathcal{L}}) = \sup_{\substack{\emptyset \neq U \subset \mathcal{X}_K \\ \text{ouvert}}} \inf_{x \in U(\bar{K})} h_{\bar{\mathcal{L}}}(x)$ ← hauteur normalisée $= \dfrac{\widehat{\deg}(x^*\bar{\mathcal{L}})}{[K(x):\mathbb{Q}]}$

On a $\lambda_{max}(V_n) \leq n\, \mu_{ess}(\bar{\mathcal{L}})$

En effet, si $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes n})$ est telle que

$\|s\|_{\sigma,\sup} \leq e^{-t}$ pour tout t, on a, pour tout $\underbrace{x}_{\text{pt algébrique}} \notin \operatorname{div}(s)$

$$h_{\bar{\mathcal{L}}^{\otimes n}}(x) = -\underbrace{\sum_p \frac{[K(x)_p : \mathbb{Q}_p]}{[K(x):\mathbb{Q}]} \log \|s\|_p}_{\leq 0} - \sum_\sigma \frac{[K(x)_\sigma : \mathbb{Q}_\sigma]}{[K(x):\mathbb{Q}]} \underbrace{\log \|s\|_{\sigma,\sup}}_{\leq -t} \geq t$$

$\mu_{ess}(\overline{\mathcal{L}})$ s'identifie aussi à

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \text{les points algébriques de hauteur } \leq \lambda \text{ sont dense dans } \mathcal{X}_K\}$$

On peut donc comparer $\mu_{ess}(\overline{\mathcal{L}})$ à $\mu_{ess}(\overline{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)}) = 0$.

$\uparrow$ Fubini-Study

$= \sup \cdots$ ✱

Notation. On désigne par $\lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}}) := \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{max}(V_n)}{n} \in \mathbb{R}$.

<u>Observation</u>. Si $t > \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}})$, alors $V_\bullet^t$ est trivial ($V_n^t = \{0\}$ pour $n \geq 1$)

<u>Lemme</u> 2 Si $\overline{\mathcal{L}}$ est gros, alors pour tout $t < \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}})$, $V_\bullet^t$ contient un diviseur ample.

<u>Preuve</u>. On a, d'après le théorème de Gillet-Soulé

$$\mathrm{rg}\, H^0(\mathcal{X}_K, L^{\otimes n}) \cdot n \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}})^+ - \log \# \widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n}) \geq -C(K)\, \mathrm{rg} \cdot \log \mathrm{rg}$$

(on notera $r_n = \mathrm{rg}\, H^0(\mathcal{X}_K, L^{\otimes n})$). d'où

$$\frac{\log \# \widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n})}{n r_n} \leq \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}})^+ + C(K) \frac{\log r_n}{n}$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \# \widehat{H}^0(\mathcal{X}, \overline{\mathcal{L}}^{\otimes n})}{n r_n} \leq \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}})^+$$

Si $\overline{\mathcal{L}}$ est gros, alors $\mathcal{L}_K$ est gros. (si $r_n = o(n^d)$, alors $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathcal{L}}) = 0$). $\Longrightarrow V_\bullet$ contient un diviseur ample.

Par définition, il existe $m \geq 1$, A ample sur $\mathcal{X}_K$ et $s \in H^0(\mathcal{X}_K, L^{\otimes m} \otimes A^\vee)$ tels que $\underbrace{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{X}_K, A^{\otimes n}) \xrightarrow{s^n} H^0(\mathcal{X}_K, L^{\otimes nm}))}_{W_n :=} \subset V_{nm}$ $(\forall n \geq 1)$.

Comme $W_\bullet$ est une algèbre de type fini, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W_n \subset V_{nm}^a$ pour tout n.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $t + \varepsilon < \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathcal{L}})$. Il existe p assez grand tel qu'il existe $s_p \in \mathcal{F}^{p(t+\varepsilon)} V_p$ tel que

$$a_p := \frac{am + (t+\varepsilon)p}{m+p} > t$$

L'image de l'application

$$H^0(\mathscr{X}_K, A^{\otimes n}) \longrightarrow V_{n(m+p)} \quad \text{donnée par } (sS_p)^n$$

est donc contenue dans

$$W_n \cdot V_{np}^{t+\varepsilon} \subset V_{nm}^{a} \cdot V_{np}^{t+\varepsilon} \subset V_{nm+np}^{a_p} \subset V_{n(m+p)}^{t}.$$

\#

Démonstration du théorème

1. On désigne par Δ le corps d'Okounkov de L, et par Δ^t le corps d'Okounkov de $V_\cdot^t$ $(t < \lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathscr{L}}))$.

Par définition, on a
et le théorème de Lazarsfeld-Mustaţă

$$d! \, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^t) = \mathrm{vol}(V_\cdot^t) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{rg}(\mathcal{F}^{nt} H^0(\mathscr{X}_K, L^{\otimes n}))}{n^d/d!}$$

Donc

$$d! \int_0^{\lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathscr{L}})} \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathscr{L}})} \frac{\mathrm{rg}(\mathcal{F}^{nt} H^0(\mathscr{X}_K, L^{\otimes n}))}{n^d/d!}\,dt$$

En outre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C(K)\, r_n \log r_n}{n^{d+1}/d!} = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{rg}(\mathcal{F}^{nt} H^0(\mathscr{X}_K, L^{\otimes n}))}{n^d/d!}\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{rg}(\mathcal{F}^{t} H^0(\mathscr{X}_K, L^{\otimes n}))}{n^{d+1}/d!}\,dt$$

D'après le théorème de Gillet-Soulé, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \widehat{H}^0(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!} = (d+1)! \int_0^{\lambda_{max}^{asy}(\overline{\mathscr{L}})} \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^t)\,dt$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous-algèbre $W_\cdot$ de type fini de $V_\cdot^0$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^t(W_\cdot))\,dt \geq \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^d}(\Delta^t)\,dt - \varepsilon$$

par rapport à la filtration induite.

(Pour tout p, considérons la sous-algèbre engendrée par $V_1 + \cdots + V_p$.)

3. Passage au cas géométrique.

Comme $\widehat{\mathrm{vol}}$ est un invariant birationnel (résultat de Moriwaki et Yuan), quitte à résoudre la singularité (théorème de Hironaka), on peut supposer $\mathcal{X}_K$ lisse. Pour tout entier $p \geq 1$ tel que $V_p^0 \neq \{0\}$, soit $\mathcal{E}_p$ la saturation de V_p^0 dans $H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes p})$.

Soit $\mathcal{X}_p = \mathrm{Proj}\left(\mathrm{Im}\left(\bigoplus_{n \geq 0} \pi^* \mathrm{Sym}^n \mathcal{E}_p \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes np}\right)\right)$

l'élatement de $\mathcal{X}$ le long du lieu de base de $\mathcal{E}_p$.

Soient $\mathcal{A}_p = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_p}(1)$, $\mathcal{M}_p$ le faisceau inversible associé au diviseur exceptionnel. Soit s la section globale de $\mathcal{M}_p$ qui trivialise le faisceau inversible en dehors du diviseur exceptionnel.

Soit $\phi_p : \mathcal{X}_p \longrightarrow \mathcal{X}$ le morphisme structurel. On a $\phi_p^* \mathcal{L}^{\otimes p} \cong \mathcal{A}_p \otimes \mathcal{M}_p$.

En outre, on a un morphisme $i_p : \mathcal{X}_p \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}_p)$ tel que $i_p^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_p}(1)) \cong \mathcal{A}_p$. La restriction des sections globales de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_p}(n)$ donne une application linéaire injective

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{Sym}^n \mathcal{E}_p \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes np})\right) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{A}_p^{\otimes n}).$$

Considéré comme un sous-module de $H^0(\mathcal{X}_p, \phi_p^* \mathcal{L}^{\otimes p})$ via s.

<u>Métrique</u>. $\forall\, \sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$, soit $\|\cdot\|_{\sigma,n}$ la norme hermitienne sur $\mathcal{A}_{p,\sigma}$ induite par $\phi_p^* \pi^* \left(\mathrm{Im}(\mathrm{Sym}^n \mathcal{E}_p \to H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes np}))\right) \longrightarrow \mathcal{A}_p^{\otimes n}$

alors $\|\cdot\|_{\sigma,n}^{1/n}$ est une métrique continue sur $\mathcal{A}_p$ qui converge vers une métrique $\|\cdot\|_\sigma$ qui est semi-positive (car les $\|\cdot\|_{\sigma,n}^{1/n}$ sont semi-positives, et la convergence est monotone).

Le résultat que l'on a obtenu montre que

$$\sup_p \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathcal{A}}_p)}{p^{d+1}} = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathcal{L}})$$

Le théorème est ainsi démontré.