Catégorie dérivée. groupe de Grothendieck Séance 3 ①

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. 1. Complexes de cochaîne

$\underline{Ch}(\mathcal{A})$: catégorie des complexes de cochaîne dans $\mathcal{A}$

$$A : \cdots \to A^{n-1} \xrightarrow{d} A^n \xrightarrow{d} A^{n+1} \to \cdots \qquad d^2 = 0$$

morphisme $f : A \to B$ est la famille $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \to & A^{n-1} & \to & A^n & \to & A^{n+1} & \to & \cdots \\ & & \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n+1} & & \\ \cdots & \to & B^{n-1} & \to & B^n & \to & B^{n+1} & \to & \cdots \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d_{A[m]} = (-1)^m d_A ! \\ A[m]^n = A^{n-m} \end{array}}$$

commute. Foncteur de décalage $[m] : \underline{Ch}(\mathcal{A}) \to \underline{Ch}(\mathcal{A})$

Cohomologie : $H^n : \underline{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ foncteur

catégorie homotopique $\underline{K}(\mathcal{A})$ (ne pas confondre avec le groupe de Grothendieck)

objets : même que $\underline{Ch}(\mathcal{A})$

morphisme : $\mathrm{Hom}_{\underline{Ch}}(A, B) / \sim$ équivalence d'homotopie.

Soient f et g deux morphismes de A vers B. On dit que f et g sont homotopiques (et on note $f \sim g$) s'il existe des morphismes $s = (s_n : A^n \to B^{n-1})$ tels que

$$f - g = sd + ds$$

$$\begin{tikzcd} A^{n-1} \arrow[r, "d"] & A^n \arrow[r, "d"] \arrow[dl, "s_n"'] & A^{n+1} \arrow[dl, "s_{n+1}"'] \\ B^{n-1} \arrow[r, "d"'] & B^n \arrow[r, "d"'] & B^{n+1} \end{tikzcd}$$

Remarque ① $\mathrm{Hom}_{\underline{K}}(A, B)$ est un groupe quotient de $\mathrm{Hom}_{\underline{Ch}}(A, B)$

② Si $f, g : A \to B$ sont homotopiques, $g : B \to C$, alors $gf \sim gf'$ (similaire par composition à droite)

③ On a un foncteur "quotient" : $\underline{Ch}(\mathcal{A}) \to \underline{K}(\mathcal{A})$

④ les foncteur de cohomologie H^n se factorise par $\underline{K}(\mathcal{A})$

⑤ $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{Ch}}(A, B)$. L'image de f dans $\mathrm{Hom}_{\underline{K}}(A, B)$ est inversible si et seulement si f est une équivalence d'homotopie.

(il existe g tel que $fg \sim id$ $gf \sim id$).

<u>Variants</u> $\underline{Ch}^+(\mathcal{A})$ sous-catégorie pleine des complexes $A^\cdot$ tels que $A^n = 0$ pour n assez negatif

$\underline{Ch}^-(\mathcal{A})$ sous-catégorie pleine des complexes $A^\cdot$ tels que $A^n = 0$ pour n assez positif

$\underline{Ch}^b(\mathcal{A})$ sous-catégorie pleine des complexes $A^\cdot$ tels que $A^n = 0$ pour tout sauf un nombre fini de n.

catégorie homotopique correspondante

$\underline{K}^+(\mathcal{A})$ $\underline{K}^-(\mathcal{A})$. $\underline{K}^b(\mathcal{A})$

<u>Proposition</u> Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Si $F : \underline{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathcal{C}$ est un foncteur qui envoie tout équivalence d'homotopie en un isomorphisme alors F se factorise de façon unique par $\underline{K}(\mathcal{A})$.

<u>Démonstration</u> Pour tout complexe de cochaîne $B^\cdot$, on construit un nouveau complexe $cyl(B)$ (le cylindre de B) comme la suite $cyl(B)^n = B^n \oplus B^{n+1} \oplus B^n$, et d_{cyl} est donné par la matrice

$$\begin{bmatrix} d_B & id & 0 \\ 0 & -d_B & 0 \\ 0 & -id & d_B \end{bmatrix} : \begin{matrix} B^n \\ \oplus \\ B^{n+1} \\ \oplus \\ B^n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} B^{n+1} \\ \oplus \\ B^{n+2} \\ \oplus \\ B^{n+1} \end{matrix}$$

on vérifie aisément que $d_{cyl}^2 = \begin{bmatrix} d_B^2 & d_B - d_B & 0 \\ 0 & d_B^2 & 0 \\ 0 & d_B - d_B & d_B^2 \end{bmatrix} = 0$

Soient $\alpha : B \to cyl(B)$ et $\beta : cyl(B) \to B$ des morphismes de complexes. définis comme $\alpha = (0, 0, id)$ $\beta = pr_1 + pr_3$. On a $\beta\alpha = id$, et $\alpha\beta : cyl(B) \to cyl(B)$ est défini par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ id & 0 & id \end{pmatrix}$

Soit $s = (s_n : cyl(B)^n \to cyl(B)^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ la famille de morphismes dans $\mathcal{A}$ définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $s\, d_{cyl} + d_{cyl}\, s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d_B & -id & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -id & 0 & 0 \\ d_B & 0 & 0 \\ id & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \alpha\beta - Id_{cyl(B)}$.

On en déduit que α est une équivalence homotopique. En particulier $F(\alpha) : F(B) \longrightarrow F(cyl(B))$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$ dont l'inverse est $F(\beta)$.

Considérons un autre morphisme $\alpha' : B \xrightarrow{(id,0,0)} cyl(B)$. On a $\beta\alpha' = id$

Donc $F(\alpha') = F(\alpha)\, F(\beta)\, F(\alpha') = F(\alpha)$.

Enfin, si $f, g : B \to C$ sont deux morphismes de complexe et s est une homotopie entre f et g, alors $\gamma = (f, s, g) : cyl(B) \to C$ est un morphisme de complexe car

$$\gamma\, d_{cyl} = (f, s, g) \begin{pmatrix} d_B & id & 0 \\ 0 & -d_B & 0 \\ 0 & -id & d_B \end{pmatrix} = (f d_B,\ f - g - s d_B,\ g d_B)$$

$$= (d_C f,\ d_C s,\ d_C g) = d_C \gamma.$$

En outre, on a $\gamma\alpha' = f$, $\gamma\alpha = g$. Donc

$$F(f) = F(\gamma)\, F(\alpha') = F(\gamma)\, F(\alpha) = F(g).$$

2. Triangles.

Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de complexe de cochaînes. On définit le cône de f comme le complexe $C(f)$ tel que $C(f)^n = A^{n+1} \oplus B^n$ et que d_C soit de matrice $\begin{bmatrix} -d_A & 0 \\ -f & d_B \end{bmatrix} : \begin{matrix} A^{n+1} \\ \oplus \\ B^n \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} A^{n+2} \\ \oplus \\ B^{n+1} \end{matrix}$.

On a $d_C^2 = \begin{bmatrix} d_A^2 & 0 \\ f d_A - d_B f & d_B^2 \end{bmatrix} = 0$.

On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{g} C(f) \xrightarrow{\delta} A[-1] \longrightarrow 0$$

où $g = (0, id)$, $\delta = -pr_1$

qui induit une suite exacte de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(C(f)) \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C(f)) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

s'identifie à $H^n(f)$

<u>Définition</u> On dit que $f: A \to B$ est un quasi-isomorphisme si $H^n(f)$ est un isomorphisme pour tout entier n.

f est un quasi-isomorphisme $\Longleftrightarrow$ $C(f)$ est un complexe exact

<u>Définition</u> Le triplet (f, g, δ) est appelé le triangle exact associé à f

Soient $A' \xrightarrow{u} B' \xrightarrow{v} C' \xrightarrow{w} A'[-1]$ des morphismes de complexes. S'il existe des équivalences d'homotopie α, β, γ telles que le diagramme suivant commute dans $\underline{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & B' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & C' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & A'[-1] \arrow[d, "\alpha[-1]"] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C(f) \arrow[r] & A[-1]
\end{tikzcd}$$

(i.e. commute à équivalence homotopique près), on dit que (u, v, w) est un triangle exact de (A', B', C').

<u>Proposition</u> Si (A, B, C) sont trois complexe de cochaîne et si (u, v, w) est un triangle de (A, B, C), alors il induit une suite exacte de cohomologies

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

3. Catégorie triangulée

Soit $\underline{K}$ une catégorie additive munie d'une automorphisme T

On appelle triangle dans $\underline{K}$ tout diagramme de la forme

$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} T(A)$ dans $\underline{K}$, noté comme (u, v, w)

Si (u, v, w) et (u', v', w') sont deux triangles et s'il existe des isomorphisme α, β et γ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\gamma"] & TA \arrow[d, "T(\alpha)"] \\
A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C' \arrow[r, "w'"'] & TA'
\end{tikzcd}$$

commute, on dit que (u, v, w) et (u', v', w') sont isomorphes, noté $(u, v, w) \cong (u', v', w')$

Soit $\mathcal{E}$ une collection de triangles dans $\underline{K}$. On dit que $(\underline{K}, \mathcal{E})$ est une catégorie triangulée si les axiomes suivants sont vérifiés

(1) Pour tout morphisme $u : A \to B$, il existe des morphismes v et w tels que $(u, v, w) \in \mathcal{E}$

(2) pour tout objet A de $\underline{K}$, $(id_A, 0, 0) \in \mathcal{E}$, où on a considéré le diagramme $A \xrightarrow{id} A \to 0 \to TA$

(3) Si $(u, v, w) \in \mathcal{E}$ et si $(u', v', w') \cong (u, v, w)$, alors $(u', v', w') \in \mathcal{E}$

(4) Si $(u, v, w) \in \mathcal{E}$, alors $(v, w, -Tu) \in \mathcal{E}$, $(-T^{-1}w, u, v) \in \mathcal{E}$.

(5) Si (u, v, w) et (u', v', w') sont deux triangles dans $\mathcal{E}$

$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$, $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} C' \xrightarrow{w'} TA'$

et s'il existe des morphismes $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ tels que $gu = u'f$, alors il existe un morphisme $h : C \to C'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\
A' \arrow[r, "u'"'] & B' \arrow[r, "v'"'] & C' \arrow[r, "w'"'] & TB
\end{tikzcd}$$

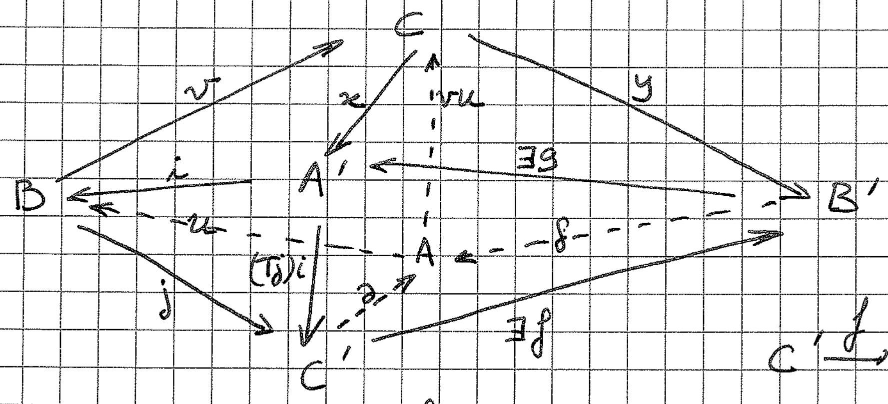
Commute.

先不讲

(6) Supposons $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{j} C' \xrightarrow{\partial} TA$ $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{x} A' \xrightarrow{i} TB$

$A \xrightarrow{vu} C \xrightarrow{y} B' \xrightarrow{\delta} TA$ sont trois triangles dans $\mathcal{E}$.

Axiome octaédrique



$C' \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} A' \xrightarrow{(Tj)i} TC'$

alors il existe un triangle $(f, g, (Tj)i)$ dans $\mathcal{E}$ tel que le diagramme octaédral admet quatre faces commutatives comme la suite :

$\partial = \delta f : C' \to TA$ $x = gy : C \to A'$

$yv = fj : B \to B'$ $(Tu)\delta = ig : B' \to TB$

(seulement u et v interviennent dans cette histoire)

Remarque. Soit $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ un triangle dans $\mathcal{E}$

on a un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] & B \\ A \arrow[u, "id"] \arrow[r, "id"'] & A \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$
qui induit (par axiome ⑤) un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dotted] & TA \arrow[d, "id"] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C \arrow[r, "w"'] & TA \end{tikzcd} \Rightarrow vu = 0$$

par la même raison, $wv = 0$, $(Tu)w = 0$ (via axiome ④)

Définition Soient $(\underline{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $H : \underline{K} \to \mathcal{A}$ un foncteur. On dit que H est un foncteur de cohomologie si, pour tout triangle $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ dans $\mathcal{E}$, H induit une suite exacte

$$\cdots H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \to \cdots$$

où $H^n(X) := H(T^n X)$.

il suffit de vérifier $H(A) \to H(B) \to H(C)$ est exact

Exemple Si $(\underline{K}, \mathcal{E})$ est une catégorie triangulée et si X est un objet de K, alors $\mathrm{Hom}_{\underline{K}}(X, -) : \underline{K} \longrightarrow \underline{Ab}$ est un foncteur de cohomologie. En effet, si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ est dans $\mathcal{E}$, alors $vu = 0$ considérons $\mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}(X, B) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}(X, C)$

On a $v^* u^* = 0$ car $vu = 0$. Si $f : X \to B$ est tel que $v^*(f) = vf = 0$, on a un diagramme dont le carré au milieu commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, dotted, "g"'] & X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & TX \arrow[d, dotted, "Tg"] \\ A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C \arrow[r, "w"'] & TA \end{tikzcd}$$

par les axiomes ③ et ④, $\exists\, g : X \to A$ tel que le diagramme soit commutatif, i.e. $f = ug = u^*(g)$.

<u>Proposition</u> Soient $(\underline{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée. Supposons que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & TA' \end{tikzcd}$$

est un diagramme où les lignes sont des triangles dans $\mathcal{E}$. Si f et g sont des isomorphismes, alors il en est de même de h

<u>Démonstration</u> On applique $\mathrm{Hom}(X, -)$ et puis fait appel au lemme de cinq pour obtenir que $\mathrm{Hom}(X, h)$ est un isomorphisme pour tout X.

<u>Corollaire</u> Soit u un morphisme dans $\underline{K}$. Il n'y a qu'un seul triangle (à isomorphisme près) dans $\mathcal{E}$ dont le premier morphisme s'identifie à u.

这里用最后一条公理

<u>Proposition</u> Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Soit $\mathcal{E}$ la collection des triangles exacts dans $\underline{K}(\mathcal{A})$. Alors $(\underline{K}(\mathcal{A}), \mathcal{E})$ est une catégorie triangulée.

<u>Démonstration</u> T est le foncteur de décalage $[-1]$

axiome ①: on peut prendre le cône de u

② : on peut vérifier que $C(id_A)$ est homotopique à zéro

il est en fait exact et scindé : $s : A^{n+1} \oplus A^n \xrightarrow[(+pr_2, 0)]{} A^n \oplus A^{n-1}$

définit le scindage : $d_C = d_C s d_C$

③ par définition

④ Si $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$ est un triangle exact, alors

$C(v) \longrightarrow A[-1]$ et $B[-1] \longrightarrow C(w)$ sont des équivalences homotopiques avec $C = C(u)$

⑤ fonctorialité entre les cônes.

⑥ On peut supposer que $C' = C(u)$, $A' = C(v)$ et $B' = C(vu)$

$f : \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & id \end{bmatrix} : \begin{matrix} B^n \\ \oplus \\ A^{n+1} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^n \\ \oplus \\ A^{n+1} \end{matrix}$ $\quad g : \begin{bmatrix} id & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} : \begin{matrix} C^n \\ \oplus \\ A^{n+1} \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^n \\ \oplus \\ B^{n+1} \end{matrix}$.

Les détails sont laissés aux étudiants.

Application de l'axiome ⑥

Si
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "u'"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$
est un carré commutatif, alors il existe un diagramme dont

- les lignes et les colonnes sont dans $\mathcal{E}$
- les carrés sont commutatifs, sauf celui avec $*$, qui est anti-commutatif.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & TA \arrow[d, "Tu"] \\
A' \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & TA' \arrow[d, "Tv"] \\
A'' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "*"] & TA'' \arrow[d, "Tw"] \\
TA \arrow[r, "Tf"'] & TB \arrow[r, "Tg"'] & TC \arrow[r, "T\delta"'] & T^2A
\end{tikzcd}$$

4. Localisation

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et S une collection de morphismes de $\mathcal{C}$. On dit que S est un système multiplicatif si les conditions suivantes sont vérifiées

① S contient tous les morphisme d'identité, et est stable par composition

② Si $\alpha : Z \to Y$ est un morphisme dans S, alors pour tout morphisme $g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & Z \arrow[d, "\alpha"] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \text{avec } \beta \in S$$

De façon similaire, pour tout morphisme $i : Z \to A$, il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "\gamma"] \\ Y \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{avec } \gamma \in S$$

③ Si $f, g : X \to Y$ sont des morphisme dans $\mathcal{C}$, alors $\exists s \in S \ sf = sg \iff$
$\exists t \in S \ ft = gt$

<u>Remarque</u> S^{op} est un système multiplicatif dans $\mathcal{C}^{op}$

(de X vers Y)

fraction : diagramme de la forme $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ avec $s \in S$

deux fractions $X \xleftarrow{s_i} Z_i \xrightarrow{f_i} Y$ $(i=1.2)$ sont dite équivalentes s'il existe la troisième fraction $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ et des morphismes $\alpha_i : Z \to Z_i$ tels que le diagramme commute.

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & Z \arrow[l, "s"] \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\alpha_2"] & Y \\
& Z_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) = \{\text{fractions de } X \text{ vers } Y\}/\sim$$

<u>Théorème</u> (Gabriel-Zisman)

1. Les objets de $\mathcal{C}$ et les $\mathrm{Hom}_S(-,-)$ forment une catégorie (notée comme $S^{-1}\mathcal{C}$)
2. On a un foncteur canonique de $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ qui envoie un morphisme $f : X \to Y$ en $X \xleftarrow{id} X \xrightarrow{f} Y$
3. Si $\mathcal{D}$ est une catégorie et si $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur qui envoie tout morphisme dans S en un isomorphisme de $\mathcal{D}$, alors φ se factorise de façon unique par $S^{-1}\mathcal{C}$.

(facile modulo des difficultés de la théorie des ensembles)

La condition ② est utilisée à construire la composition

<u>Remarque</u> 1. Deux morphismes $f, g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ induisent le même morphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement si $\exists s \in S$ tel que $sf = sg$

2. $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ préserve les objet initiaux, terminaux et les sommes directes finies.

3. On suppose que $\mathcal{C}$ a un objet nul. Pour tout $X \in \mathrm{obj}\,\mathcal{C}$, X est un objet nul dans $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement si $id_X \in S$

4. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie exacte, il en est de même de $S^{-1}\mathcal{C}$.

Définition Soient $(\underline{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée et $H : \underline{K} \to \mathcal{A}$ un foncteur de cohomologie. On désigne par S_H la collection des morphismes s dans $\underline{K}$ tel que $H(T^n s)$ soit un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Proposition S_H est un système multiplicatif

Démonstration La vérification de ① est facile

② Soit $s : Z \to Y$ un morphisme dans S_H. qui s'insérit dans un triangle $Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{u} A \xrightarrow{\delta} TZ$ dans $\mathcal{E}$.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme quelconque. On insérit $uf : X \to A$ dans un triangle $W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{uf} A \xrightarrow{\omega} TW$

$\rightsquigarrow$ il existe $g : W \to Z$ qui rend le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "t"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X \arrow[r, "uf"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, equal] & TW \arrow[d, dashed, "Tg"] \\ Z \arrow[r, "s"'] & Y \arrow[r, "u"'] & A \arrow[r, "\delta"'] & TZ \end{tikzcd}$$

$H(T^n s)$ sont des isomorphismes $\Rightarrow H^n(A) = 0$ pour tout n.

$\Rightarrow H(T^n t)$ sont des isomorphismes $(\forall n) \Rightarrow t \in S_H$

③ il suffit de vérifier que $\exists s \in S$, $sf = 0 \Rightarrow \exists t \in S$, $ft = 0$
(quitte à passer à la catégorie opposée) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{s} Y'$

On insrit s dans un triangle $(Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{s} Y' \to TZ) \in \mathcal{E}$.

$\operatorname{Hom}_{\underline{K}}(X, -)$ est un foncteur de cohomologie $\Rightarrow$

$\operatorname{Hom}_{\underline{K}}(X, Z) \xrightarrow{u_*} \operatorname{Hom}_{\underline{K}}(X, Y) \xrightarrow{s_*} \operatorname{Hom}_{\underline{K}}(X, Y')$ exact

Comme $sf = 0$ $\exists h : X \to Z$ tel que $f = uh$

h est inscrit dans un triangle $(X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{\gamma} TX') \in \mathcal{E}$

On a $ft = uht = 0$. En outre, $s \in S_H \Rightarrow H^n(Z) = 0 \ \forall n$

$\Rightarrow t \in S_H$

On construit une famille $S_H^{-1}\mathcal{E}$ de triangles dans $S_H^{-1}\underline{K}$. Si $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ et $\gamma : C \to TA$ sont trois morphismes dans $S_H^{-1}\underline{K}$ correspondant aux diagrames $A \xleftarrow{s_1} A' \xrightarrow{u} B$, $B \xleftarrow{s_2} B' \xrightarrow{v} C$, $C \xleftarrow{s_3} C' \xrightarrow{w} TA$

$(\alpha, \beta, \gamma) \in S_H^{-1}\mathcal{E}$ s'il est isomorphe à l'image d'un triangle dans $\mathcal{E}$

<u>Proposition</u> Soient $(\underline{K}, \mathcal{E})$ une catégorie triangulée et H un foncteur de cohomologie. Alors $(S_H^{-1}\underline{K}, S_H^{-1}\mathcal{E})$ est une catégorie triangulée.

5. Catégorie dérivée.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On désigne par $\underline{D}(\mathcal{A})$ la localisation de $\underline{K}(\mathcal{A})$ par rapport au système multiplicatif défini par le foncteur de cohomologie H^0. Les catégories $D^+(\mathcal{A})$, $D^-(\mathcal{A})$ et $D^b(\mathcal{A})$ sont définies de façon similaires. Ce sont des catégories triangulées.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On dit qu'un objet I de $\mathcal{A}$ est injectif si le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \underline{Ab}$ est exact ou de façon équivalente, si $f : A \to B$ est un monomorphisme et si $\alpha : A \longrightarrow I$ est un morphisme, alors il existe $\beta : B \longrightarrow I$ tel que $\alpha = \beta f$.

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur additif adjoint à droite d'un foncteur exact, alors F envoie les objets injectifs en des objets injectifs

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

On dit que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'objet injectif si, pour tout objet A, il existe un monomorphisme $A \to I$

<u>Théorème</u> Soit I_A un complexe de cochaîne de la forme $0 \to A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$ où les I^n sont injectifs. Pour tout complexe de cochaîne exact $M_B : 0 \to B \to M^0 \to M^1 \to \ldots$, tout morphisme de complexes de B vers A se relève en un morphisme de complexes de M_B vers I_A, qui est unique à équivalence homotopique près.

<u>Démonstration</u> Soit $f : B \to A$ un morphisme. On construit par récurrence des morphismes $f^n : M^n \longrightarrow I^n$. L'existence de f^0 provient de la définition des objets injectifs. Pour le passage de f^n à f^{n+1}, il suffit d'observer que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M^{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & M^n & \longrightarrow & M^{n+1} \\ {\scriptstyle f^{n-1}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f^n} & & \\ I^{n-1} & \xrightarrow[d_{n-1}]{} & I^n & \longrightarrow & I^{n+1} \end{array} \quad \text{induit} \quad \begin{array}{ccc} 0 \to \mathrm{Coker}(\partial_{n-1}) & \longrightarrow & M^{n+1} \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Coker}(d_{n-1}) & \longrightarrow & I^{n+1} \end{array}$$

L'unicité est laissée comme un exercice.

Corollaire Supposons que I est un complexe de cochaîne dans $CH^+(\mathcal{A})$ dont chaque terme est inj. Si $f : I \to M$ est un quasi-isomorphisme, alors il admet une inverse à gauche dans la catégorie $\underline{K}(\mathcal{A})$. $C(f)^n = I^{n+1} \oplus M^n$ $\quad d_C = \begin{bmatrix} -d_I & 0 \\ -f & -d_M \end{bmatrix}$

Démonstration Par la condition $f : I \to M$ est un quasi-isomorphisme, on obtient que $C(f)$ est un complexe exact. En outre, le théorème montre que le morphisme canonique $\delta = (-id, 0) : C(f) \to I[-1]$ est homotopique au morphisme nul. Soit $s = (\alpha, \beta) : I[-1] \oplus M \to (I, -d_I)$ (car $d_{I[-1]} = -d_I$) l'homotopie. On a

$$(-id, 0) = \delta = s\, d_C + d_I\, s = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} -d_I & 0 \\ -f & d_M \end{pmatrix} - d_I(\alpha, \beta)$$

$$= (-\alpha d_I - \beta f,\ \beta d_M) - (d_I \alpha,\ d_I \beta)$$

Donc $\beta : M \to (I, d_I)$ est un morphisme de complexes et

$$-\beta f + id = \alpha d_I + d_I \alpha \implies \beta f = id \text{ dans } \underline{K}(\mathcal{A}) \qquad \#$$

Corollaire Soit I un complexe de cochaîne dans $Ch^+(\mathcal{A})$ dont les termes sont injectifs. Pour tout complexe M, on a $\mathrm{Hom}_{\underline{D}(\mathcal{A})}(M, I) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{K}(\mathcal{A})}(M, I)$.

Démonstration f un morphisme de M vers I dans $\underline{D}(\mathcal{A})$, alors f correspond à un diagramme $M \xrightarrow{g} N \xleftarrow{s} I$ où s est un quasi-isomorphisme. Soit t l'inverse à gauche de s dans $\underline{K}(\mathcal{A})$ alors tg est le morphisme dans $\mathrm{Hom}_{\underline{K}(\mathcal{A})}(M, I)$ qui détermine la classe f.

Référence Weibel An introduction to homological algebra Chap. 10

Kashiwara. Schapira Sheaves on manifolds Chap. I.

Hartshorne: Residues and duality LNM 20