$\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

$\underline{K}(\mathcal{A})$ complexes de cochaîne + morphismes de complexes modulo homotop

$\underline{D}(\mathcal{A})$ localisation de $\underline{K}(\mathcal{A})$ en rendant inversibles les quasi-iso.

$\underline{K}^+(\mathcal{I})$ La sous-catégorie pleine de $\underline{K}^+(\mathcal{A})$ des complexes consistant des objets injectifs

Supposons que $\mathcal{A}$ admet suffisament de objets injectifs

<u>Théorème</u> On a une équivalence de catégories

$$\underline{D}^+(\mathcal{A}) \simeq \underline{K}^+(\mathcal{I})$$

<u>Démonstration</u> Soit $A^\cdot$ un complexe dans $\underline{D}^+(\mathcal{A})$. Supposons que l'on a construit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{n-2} \arrow[r, "d_A^{n-2}"] \arrow[d, "f^{n-2}"] & A^{n-1} \arrow[r, "d_A^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"] & A^n \arrow[d, "f^n"] \\
\cdots \arrow[r] & I^{n-2} \arrow[r, "d_I^{n-2}"'] & I^{n-1} \arrow[r, "d_I^{n-1}"'] & I^n
\end{tikzcd}$$

avec les I^j injectifs

- $H^j(A) = H^j(I)$ pour $j < n$
- $H^n(A) \to \mathrm{Coker}(d_I^{n-1})$ est un monomorphisme

Soit Z^{n+1} le coproduit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd}
A^{n+1} \arrow[r, dashed] & Z^{n+1} \arrow[r] & I^{n+1} \\
H^n(A) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(d_A^{n-1}) \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & \mathrm{Coker}(d_I^{n-1}) \arrow[u, dashed, "\varphi"] & I^n \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

<u>引理</u>：若$\mathcal{A}_0$是$\mathcal{A}$中的子范畴. 使得$\forall X \in \mathcal{A}$ $\exists X_0 \in \mathcal{A}_0$及单态射$X \to X_0$. 那么$\mathcal{A}$中左有界复形都拟同构于$\mathcal{A}_0$中的复形.

On choisit un monomorphisme de Z^{n+1} vers I^{n+1} avec I^{n+1} injectif

$H^n(A) = \mathrm{Ker}(\psi)$ $\quad H^n(I) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ car $Z^{n+1} \to I^{n+1}$ est un monomorphisme

Comme $H^n(A) \to \mathrm{Coker}(d_I^{n-1})$ est un monomorphisme on obtient que $H^n(A) = H^n(I)$.

En outre, $\mathrm{Coker}(\psi) \to \mathrm{Coker}(\varphi)$ est un monomorphisme

$\rightsquigarrow$ $H^{n+1}(A) \to \mathrm{Coker}(d_I^n)$ est un monomorphisme.

$\underline{D}^+(\mathcal{A}) \cong S^{-1}\underline{K}^+(\mathcal{I})$

On a montré que $A^\cdot$ est quasi-isomorphe à un complexe $I^\cdot \in \underline{K}^+(\mathcal{I})$

En outre, nous avons montré que tout quasi-isomorphisme dans $\underline{K}^+(\mathcal{I})$ est inversible à gauche. Si $s : I \to I'$ est un morphisme dans $\underline{K}^+(\mathcal{I})$ qui est un quasi-isomorphisme, alors il existe $t : I' \to I$ tel que $ts = id$. En même temps t est aussi un quasi-iso. donc il existe u tel que $ut = id$ $\rightsquigarrow$ $u = s$ et donc s est inversible

#

6. Foncteurs dérivés.

sous-catégorie localisable = sous catégorie triangulée t.q. $Q \cap \mathrm{Mor}(\underline{K})$ est un système mult.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes. On désigne par $\underline{K}$ l'une des catégories suivantes : $\underline{K}(\mathcal{A})$, $\underline{K}^+(\mathcal{A})$, $\underline{K}^-(\mathcal{A})$, $\underline{K}^b(\mathcal{A})$ et $\underline{D}$ la catégorie dérivée correspondante.

__Définition__ Soit $F : \underline{K} \longrightarrow \underline{K}(\mathcal{B})$ un morphisme de catégories triangulées (foncteur triangulé). Un foncteur dérivé à droite de F est défini comme la donnée d'un morphisme $RF : \underline{D} \longrightarrow \underline{D}(\mathcal{B})$ de catégories triangulées, ainsi qu'une transformation naturelle ξ de $qF : \underline{K} \to \underline{K}(\mathcal{B}) \xrightarrow{q} \underline{D}(\mathcal{B})$ vers $(RF)q : \underline{K} \xrightarrow{q} \underline{D} \to \underline{D}(\mathcal{B})$ tels que, si $G : \underline{D} \to \underline{D}(\mathcal{B})$ est un autre foncteur triangulé muni d'une transformation naturelle $\zeta : qF \Longrightarrow Gq$, alors il existe une unique transformation naturelle $\eta : RF \Rightarrow G$ tel que $\zeta_A = \eta_{q(A)} \circ \xi_A$ pour tout $A \in \underline{K}$.

(Situation duale pour le foncteur dérivé à gauche).

__Remarque__ ① Si le foncteur dérivé existe, alors il est unique à iso. naturel près.

② On utilise des expressions R^+, R^-, R^b etc lorsqu'il y a des ambiguïtés.

__Théorème d'existence__

Soit $F : \underline{K}^+(\mathcal{A}) \to \underline{K}(\mathcal{B})$ un foncteur triangulé. Si $\mathcal{A}$ a suffisamment d'objets injectifs, alors le foncteur dérivé R^+F existe. De plus, si I est un complexe dans $\underline{K}^+(\mathcal{A})$ qui consiste des objects injectifs, alors $R^+F(I) \simeq qF(I)$ dans $\underline{D}(\mathcal{B})$.

__Démonstration__ Le foncteur R^+F est construit comme une composition

$$\underline{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{i} \underline{K}^+(I) \xrightarrow{F} \underline{K}^+(\mathcal{B}) \xrightarrow{q} \underline{D}^+(\mathcal{B})$$

Pour tout complexe $A^\cdot$ dans $\underline{K}^+(\mathcal{A})$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\underline{D}^+(\mathcal{A})}(q(A), iq(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\underline{K}^+(\mathcal{A})}(A, iq(A))$$

On a construit explicitement un quasi-isomorphisme $\eta_A : A \to iq(A)$. Donc la transformation naturelle ξ est défini comme

$$\xi_A = qF(\eta_A)$$

vérification de la propriété universelle est laissée comme un exercice.

<u>Définition</u> Soit A un complexe dans $\underline{K}$. on dit que A est F-acyclique si $F(A)$ est un complexe ~~acyclique~~ exact.

<u>Théorème d'existence généralisé</u>

Supposons que $\underline{K}_0$ est une sous-catégorie triangulée de $\underline{K}$ telle que

(1) tout complexe A de $\underline{K}$ admet un quasi-isomorphisme vers un complexe A_0' dans $\underline{K}_0$.

(2) tout complexe exact dans $\underline{K}_0$ est F-acyclique.

Alors les catégories dérivées $\underline{D}$ et $\underline{D}_0$ sont équivalentes, et

$RF : \underline{D} \cong \underline{D}_0 \xrightarrow{R_0F} \underline{D}(\mathcal{B})$ est un foncteur dérivé à droite de F

<u>Remarque</u> Si $f : A \to B$ est un quasi-isomorphisme, son cône est exact. Donc $F(f) : F(A) \to F(B)$ est aussi un quasi-isomorphisme. Par conséquent F induit un foncteur entre les catégories dérivées $\underline{D}_0 \longrightarrow \underline{D}(\mathcal{B})$ qui est le foncteur dérivé de F (par rapport à $\underline{K}_0$).

<u>Foncteur dérivé d'un foncteur des ~~variétés~~ abéliennes</u>

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégorie abéliennes, et $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additif. Alors F induit un foncteur de $\underline{K}^+(\mathcal{A})$ vers $\underline{K}^+(\mathcal{B})$. On appelle foncteur dérivé de F le foncteur dérivé du foncteur $\underline{K}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \underline{K}^+(\mathcal{B})$ induit par F.

<u>exemple</u> Soit X un espace topologique. On désigne par $\underline{Ab}(X)$ la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur X. C'est une catégorie abélienne. Cette catégorie a suffisamment d'objets injectifs. En effet, si $\mathcal{F}$ est un faisceau en groupes abélien sur X, on peut plonger, pour chaque $x \in X$, la fibre $\mathcal{F}_x$ dans un groupe abélien injectif I_x (prenons par exemple $I_x = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$) et puis définir un faisceau injectif $\mathcal{I}$ comme $\prod_{x \in X} x_*(I_x)$. $\rightsquigarrow$ Si $f : X \to Y$ est une application continue $\rightsquigarrow$ $R^+f_* : D^+_{Ab}(X) \longrightarrow D^+_{Ab}(Y)$

III. Faisceaux quasi-cohérents

1.

<u>Définition</u> Soit X un schéma. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si localement $\mathcal{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme entre les modules libres. $QCoh(X)$: catégorie (abélienne) des faisceaux quasi-coh.

<u>Prop.</u> $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent $\Longleftrightarrow$ pour tout ouvert affine U de X $\mathcal{F}|_U$ est induit par un $A(U)$-module.

<u>Théorème</u> Soit $f: X \to Y$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, $\mathcal{F}$, l'image direct $f_*\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module quasi-cohérent.

<u>Démonstration</u> On peut supposer Y affine d'anneau A.
Soit s un élément de A. On désigne par $D(s)$ le sous-schéma ouvert de Y défini par s. Il faut montrer que

$$\mathcal{F}(\varphi^{-1}(D_s)) \cong \mathcal{F}(X) \otimes_A A_s$$

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrent fini de X par des ouvert affines.
Comme X est quasi-séparé, pour chaque $(i,j) \in I^2$, $U_i \cap U_j$ admet un recouvremet fini $(V_{i,j,k})_{k\in J_{ij}}$ par des ouverts affines.
On a une suite exacte

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ k\in J_{ij}}} \mathcal{F}(V_{ijk})$$

En outre, A_s est un A-algèbre plate, on a donc une suite exacte qui s'inscrit dans un diag. comm.

$$\begin{tikzcd}
A_s \otimes_A \mathcal{F}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in I} A_s \otimes_A \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\sim"] & \prod_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ k\in J_{ij}}} A_s \otimes_A \mathcal{F}(V_{ijk}) \arrow[d, "\sim"] \\
\mathcal{F}(\varphi^{-1}(D_s)) \arrow[r] & \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i \cap \varphi^{-1}(D_s)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ k\in J_{ij}}} \mathcal{F}(V_{ijk} \cap \varphi^{-1}(D_s))
\end{tikzcd}$$

Donc $A_s \otimes_A \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(\varphi^{-1}(D_s))$ est un iso

Composition de foncteurs dérivés Séance 4 ② bis

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois catégories abéliennes $\underline{K} \subset \underline{K}(\mathcal{A})$ et $\underline{K}' \subset \underline{K}(\mathcal{B})$ deux sous-catégories localisables, $\underline{D}$ et $\underline{D}'$ les catégories dérivées correspondantes. Supposons que $G : \underline{K} \to \underline{K}'$ et $F : \underline{K}' \to \underline{K}(\mathcal{C})$ sont deux foncteurs triangulés tels que RF, RG et $R(FG)$ existent, et que $RF(\underline{D}) \subset \underline{D}'$.

Théorème ① il existe une unique transformation naturelle $\zeta_{F.G} : R(FG) \Rightarrow RF \circ RG$ telle que le diagramme suivant commute pour tout $A \in \mathrm{obj}(\underline{K})$

$$\begin{tikzcd}
qFG(A) \arrow[r, "\zeta_F"] \arrow[d, "\zeta_{FG}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & RF(qG(A)) \arrow[d, "\zeta_G"] \\
R(FG)(qA) \arrow[r, "\zeta_{F.G}"'] & RF(RG(qA))
\end{tikzcd}$$

(propriété universelle des foncteurs dérivés)

② Soient $K_0 \subset K$, $K_0' \subset K'$ des sous-catégories localisables comme dans le théorème d'existence généralisé. Supposons que G envoie K_0 dans K_0'. alors ζ est un isomorphisme de foncteurs.

Remarque 1. (fonctorialité) Si $\mathcal{A} \xrightarrow{H} \mathcal{B} \xrightarrow{G} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ sont des foncteurs additives entres les catégories abéliennes. alors on a

$$\zeta_{G.H} \circ \zeta_{F,GH} = \zeta_{F,G} \circ \zeta_{FG,H}$$

Comme transformations naturelles de $R(FGH)$ vers $RF \circ RG \circ RH$.

2. Remplacer la suite spectrale de Grothendieck.

Avec les notations du théorème. On suppose que les catégorie $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont suffisamment d'objets injectifs, que F et G sont exacts à gauche, et que G envoie des objets injectifs en des objets F-acycliques, alors $\zeta : R^+(FG) \longrightarrow (R^+F) \circ (R^+G)$ est un isomorphisme de foncteurs.

Si de plus G envoie les complexes exacts en des complexes F-acycliques, et si F et G ont des dimensions cohomologiques finies, alors

$R(FG) : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow D(\mathcal{C})$ existe et

$$\zeta : R(FG) \longrightarrow RF \circ RG$$

est un isomorphisme de foncteurs.

3. Beaucoup plus simple que [EGA III.6].

4. Suite spectrale de Leray (remplacement)

Si $f : X \to Y$ est une application continue entre les espaces topologiques alors $f_* : \underline{Ab}(X) \to \underline{Ab}(Y)$ est un foncteur adjoint à droite d'un foncteur exact $f^{-1} : \underline{Ab}(Y) \to \underline{Ab}(X)$, donc préserve les objets injectifs.

par conséquent, si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des applications continues, alors $R^+(gf)_* \cong (R^+g_*) \circ (R^+f_*)$.

Lemme Soit A un anneau. La catégorie des A-module a suffisamment d'objets injectifs.

Démonstration $I_0 = \mathrm{Hom}_{Ab}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un A-module injectif. Pour tout A-module M, on a un monomorphisme canonique
$M \longrightarrow I_0^{\mathrm{Hom}_A(M, I_0)}$. Exercice : Montrer que I_0 est injectif.

Proposition Soit X un schéma quasi-compact. La catégorie $\mathrm{Qcoh}(X)$ a suffisamment d'objets injectifs.

Démonstration Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X par des schémas affines. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Pour chaque i, il existe un $\mathcal{O}_{U_i}$-module quasi-cohérent injectif $\mathcal{I}_i$ et un monomorphisme $\mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{I}_i$. Soit φ_i le morphisme d'inclusion de U_i dans X. Comme φ_{i*} est un foncteur adjoint à droite d'un foncteur exact φ_i^* (le morphisme φ_i est plat) on obtient que $\varphi_{i*}(\mathcal{I}_i)$ est injectif et quasi-cohérent (car φ_i est quasi-compact et séparé). Donc on obtient un monomorphisme

$$\mathcal{F} \longrightarrow \prod_{i\in I} \varphi_{i*}(\mathcal{I}_i)$$

(Il est important de supposer I fini car un produit infini de faisceaux quasi-cohérents peut ne pas être quasi-cohérent)

Cette proposition nous permet de définir, pour chaque morphisme quasi-compact et quasi-séparé $f : X \to Y$ entre les schémas quasi-compacts, un foncteur dérivé

$$R^+f_* : D^+\mathrm{Qcoh}(X) \longrightarrow D^+\mathrm{Qcoh}(Y)$$

2. Dimension cohomologique

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre des catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs (donc le foncteur dérivé $R^+F : D^+(\mathcal{A}) \longrightarrow D^+(\mathcal{B})$ existe)

Pour tout entier n, on désigne par R^nF le foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ qui envoie A en $H^n(R^+F(A))$ (ici on considère A comme un complexe trivial $\to 0 \to A \to 0 \to \dots$). Si $R^iF = 0$ pour tout $i > d$ mais $R^dF \neq 0$, on dit que F est de dimension cohomologique d.

$$(\operatorname{dimcoh}(F) = \sup\{d \in \mathbb{Z} \mid R^dF \neq 0\})$$

<u>Proposition</u> Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur additive entre les catégories abéliennes. On suppose que $\mathcal{A}$ admet suffisamment d'objets injectifs et que $\operatorname{dimcoh}(F) < +\infty$. Alors $RF : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ existe, et la restriction de RF à $D^+(\mathcal{A})$ coïncide avec R^+F.

<u>Démonstration</u> On appelle objet F-acyclique tout objet A de $\mathcal{A}$ tel que $R^nF(A) = 0$ pour tout $n > 0$.

<u>Syzygy</u> : Si $0 \to A \to I \to M \to 0$ est une suite exacte avec I F-acyclique, alors $R^iF(M) \cong R^{i+1}F(A)$ $\forall i \geq 1$.

$$\operatorname{Coker}(R^0F(I) \to R^0F(M)) \cong R^1F(A)$$

Plus généralement, si $0 \to A \to I^0 \to \dots \to I^m \to M \to 0$ est exact avec $I^0, \dots, I^m$ F-acycliques, alors $R^iF(M) \cong R^{i+m+1}F(A)$ $(i \geq 1)$

$$\operatorname{Coker}(R^0F(I^m) \to R^0F(A)) \cong R^{m+1}F(A)$$

Par conséquent, les complexes exacts consistants des objets F-acycliques sont F-acycliques.

D'après le théorème d'existence généralisé, il suffit de vérifier que tout complexe de cochaînes $A^\bullet$ est quasi-isomorphe à un complexe qui consiste d'objets F-acycliques. Pour cela on considère le troncature de $A^\bullet$ de la forme $\tau_{\geq i_0}A^\bullet$ $0 \to A^{i_0} \to A^{i_0+1} \to \dots$ qui est quasi-isomorphe à un complexe $I^\bullet$ dont les termes sont F-acyclique. Si $i_1 < i_0$, on peut trouver un autre complexe $I_1^\bullet$ dont les termes sont F-acycliques tel que $\tau_{\geq i_1}A^\bullet$ soit quasi-isomorphe à $I_1^\bullet$ et que $I_1^j = I^j$ pour $j \geq i_0 + n$.

Par récurrence on peut montrer la proposition. (exercice)

<u>outil</u> : ① Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte, A est F-acyclique, alors B est F-acyclique $\Longleftrightarrow$ C est F-acyclique

② Si $I^0 \to \dots \to I^n \to 0$ exact, $I^0, \dots, I^{n-1}$ sont F-acyclique, alors I^n est F-acyclique

3. Cohomologie de Čech

Soient X et Y deux schémas, et $f : X \to Y$ un morphisme affine. Alors $f_* : \mathrm{Qcoh}(X) \longrightarrow \mathrm{Qcoh}(Y)$ est un foncteur exact. Donc on a $Rf_* = f_* : D^+\mathrm{Qcoh}(X) \to D^+\mathrm{Qcoh}(Y)$.

<u>Résolution de Čech</u> Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module et $\underline{\mathcal{U}} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Pour tout entier $p \geq 0$, on désigne par $\mathcal{C}^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ le faisceau $j_{p*} j_p^* \mathcal{F}$, où

$$j_p : \coprod_{(i_0,\dots,i_p)\in I^{p+1}} U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p} \longrightarrow X$$

est le morphisme canonique. Sur un ouvert V de X, on a

$$\mathcal{C}^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F})(V) = \prod_{(i_0,\dots,i_p)} \mathcal{F}(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}\cap V).$$

L'opérateur différentiel de Čech est défini comme $d^p : \mathcal{C}^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{p+1}(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ tel que, pour tout $s = (s_{i_0,\dots,i_p}) \in \mathcal{C}^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F})(V)$,

$$(ds)_{i_0,\dots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j s_{i_0,\dots,\hat{i_j},\dots,i_{p+1}}\Big|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}\cap V}$$

<u>Proposition</u> La suite

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^0(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d^1} \cdots$$

est exacte.

(c.f. Godement « topologie algébrique et théorie des faisceaux » P. 206)

<u>Application</u>: Cohomologie relativement à un recouvrement

$$H^p_{\underline{\mathcal{U}}}(\mathcal{F}) := H^p(\Gamma(\mathcal{C}^\bullet(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F}))) \quad (= 0 \text{ lorsque } p > \# I).$$

On a un homomorphisme canonique $H^p_{\underline{\mathcal{U}}}(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}) = R^p\Gamma(\mathcal{F})$.

<u>Proposition</u> Si X est un schéma séparé et si $\underline{\mathcal{U}}$ est un recouvrement ouvert par des schémas affines, alors $H^p_{\underline{\mathcal{U}}}(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$ est un isomorphisme pour tout p.

Démonstration Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ l'unique morphisme.
j_p est un morphisme plat et affine (car X est séparé). On a
$$R^+\Gamma = R^+(\pi j_p)_* = R^+\pi_* \circ R^+ j_{p*} = R^+\pi_* \circ j_{p*}.$$
Par conséquent, pour tous entiers p et n, on a
$$H^n(X, \mathcal{C}^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F})) = R^n\pi_*(j_{p*} j_p^* \mathcal{F}) = R^n\Gamma(j_p^* \mathcal{F}) = 0 \quad \text{Si } n>0.$$
$\to$ $\mathcal{C}^p(\underline{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ est π_*-acyclique. i.e. résolution de Čech est une résolution par des faisceaux acycliques.

Corollaire Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-compact et séparé d'un schéma vers un schéma quasi-compact. Le foncteur $f_* : \mathrm{Qcoh}(X) \to \mathrm{Qcoh}(Y)$ est de dimension cohomologique finie.

Remarque résultat similaire dans le cas où X et Y sont localement noethérien, f est de type fini, et les fibres de f sont de dimension de Krull finie.

⚠ Un injectif de $\mathrm{Qcoh}(X)$ n'est pas nécessairement acyclique pour $f_* : \mathrm{Mod}(X) \to \mathrm{Mod}(Y)$. Les foncteurs dérivés de f_* comme foncteur entre | les catégories des faisceaux en modules
| les catégories des faisceaux quasi-cohérents
ne sont pas les mêmes.

(cf. SGA 6. Page 195)