1. Platitude

IV Groupe de Grothendieck

__Lemme__ Soient A un anneau local et k son corps résiduel. Si M est un A-module plat de présentation fini (i.e. le conoyau d'un homomorphisme de A-modules libres de rang fini), alors M est un A-module libre.

__Démonstration__ Comme M est un A-module de type fini, $M \otimes_A k$ est un espace vectoriel de rang fini. Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille d'éléments dans M dont l'image dans $M \otimes_A k$ forme une base. D'après le théorème de Nakayama, c'est un système de générateurs de M. Soit $f: A^n \to M$ l'homomorphisme surjectif défini par cette famille. Soit $N = \operatorname{Ker} f$. Comme M est un A-module plat, la suite exacte $0 \to N \to A^n \to M \to 0$ induit une suite exacte $0 \to N \otimes_A k \to k^n \to M \otimes_A k \to 0$. Donc $N \otimes_A k = 0$ et $N = 0$ puisque N est un A-module de type fini.

__Remarque__. On a utilisé le résultat suivant : (A étant un anneau quelconque)
Soit $\varphi: F \to M$ un homomorphisme surjectif de A-modules. Si F est de type fini et si M est de présentation finie alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est un A-module de type fini.

__Preuve__ Soit $h: A^m \twoheadrightarrow M$ tel que $\operatorname{Ker} h$ ~~soit~~ de type fini

$g: A^n \twoheadrightarrow F$.

$$\begin{tikzcd} & & A^m \arrow[d] \\ A^n \arrow[rru, dashed, "\psi"] \arrow[r, two heads] & F \arrow[r, two heads, "\varphi"] & M \end{tikzcd}$$

On choisit $\psi: A^n \to A^m$ tel que $h\psi = \varphi g$

$u: A^m \to F$ tel que $h = \varphi u$

$$\begin{tikzcd} & A^m \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "u"'] & \\ F \arrow[r, "\varphi"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "{(id,-\psi)}"] \arrow[d, "\eta"] & A^{n+m} \arrow[r, "\psi+id"] \arrow[d, "g+u"] & A^m \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"'] & F \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

où η est induit par

$(g+u) \circ (id, -\psi) = g - u\psi$

$\varphi(g - u\psi) = \varphi g - h\psi = 0$.

$$\to \operatorname{Ker} h \to \operatorname{Coker} \eta \to \underset{\substack{\| \\ 0}}{\operatorname{Coker}(g+u)}$$

car g est surjective.

Définition Soit X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module. S'il existe, pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert U de x et des entiers p, q tel que $\mathcal{F}|_U$ soit isomorphe au conoyau d'un certain homomorphisme $\mathcal{O}_U^{\oplus p} \to \mathcal{O}_U^{\oplus q}$, on dit que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie.

Proposition Soient X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{G}$ et tout point $x \in X$, l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules

$$\underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \text{ est un isomorphisme.}$$

Démonstration Le problème étant local, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est le conoyau d'un homomorphisme $\varphi : \mathcal{O}_X^{\oplus p} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus q}$

On applique $Hom_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{G})$ à la suite exacte (à droite) $\mathcal{O}_X^p \to \mathcal{O}_X^q \to \mathcal{F} \to 0$ pour obtenir une suite exacte à gauche

$$0 \to \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}^q \longrightarrow \mathcal{G}^p$$

qui induit une suite exacte à gauche en point x

$$0 \longrightarrow \underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \longrightarrow \mathcal{G}_x^q \longrightarrow \mathcal{G}_x^p$$

En outre, si on applique $Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(-, \mathcal{G}_x)$ à la suite $\mathcal{O}_{X,x}^p \to \mathcal{O}_{X,x}^q \to \mathcal{F}_x \to 0$ on obtient une suite exacte à gauche

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \longrightarrow \mathcal{G}_x^q \longrightarrow \mathcal{G}_x^p$$

par le lemme des 5, on obtient $Hom_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \simeq \underline{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$

Corollaire Soit X un espace annelé, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-module de présentation fini. Si $x \in X$ est un point tel que $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{G}_x$ comme $\mathcal{O}_{X,x}$-module, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U \simeq \mathcal{G}|_U$.

Application ① Soient X un espace annelé et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module de présentation finie. Si $x \in X$ est un point tel que $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module plat alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U$ soit un $\mathcal{O}_U$-module libre

② Soient A un anneau et M un A-module. Si M est plat et de présentation finie, alors M est un A-module projectif ~~de type fini~~.

Lemme Soit A un anneau. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules telle que M et M'' sont plats, alors M' est un A-module plat.

Preuve Pour tout A-module N, on a une suite exacte

$$\mathrm{Tor}_2(N,M'') \leftarrow \mathrm{Tor}_2(N,M)$$
$$\mathrm{Tor}_1(N,M') \to \mathrm{Tor}_1(N,M) \to \mathrm{Tor}_1(N,M'') \to N\otimes M' \to N\otimes M \to N\otimes M'' \to 0$$

$$\mathrm{Tor}_n(N,M) = N \otimes^{L,n} M \cong L^n(N\otimes -)(M) \cong L^n(-\otimes M)(N)$$

foncteur dérivé à g d'ordre n de $\otimes : A\text{-Mod} \times A\text{-M} \to \underline{Ab}$ ou $A\text{-Mod}$

Remarque Soient A un anneau et M un A-module, les conditions suivantes sont équivalentes

① M est plat ② $\mathrm{Tor}_n(M,N) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et tout A-modul N

③ $\mathrm{Tor}_1(M,N) = 0$ pour tout A-module N

Soit M un A-module.

dimension de platitude : le plus petit entier $n \geq 0$ tel qu'il existe une résolution de M par des A-modules plats

$$0 \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

On désigne par $\dim.\mathrm{pl}(M)$ la dimension de platitude du A-module M.

Lemme Soient A un anneau et M un A-module, et $d \geq 0$ un entier les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\dim.\mathrm{pl}(M) \leq d$ (2) $\mathrm{Tor}_n(M,N) = 0$ pour tout entier $n > d$ et tout A-module N

(3) $\mathrm{Tor}_{d+1}(M,N) = 0$ pour tout A-module N

(4) Si $0 \to F_d \xrightarrow{\partial_d} F_{d-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$ est une résolution avec les $F_0, \dots, F_{d-1}$ plats, le A-module F_d est aussi plat.

Démonstration. Les A-modules plats sont acycliques pour ~~l'op~~ le foncteur $M \otimes_A -$. On peut utiliser la résolution par les A-module plat à calculer les foncteurs dérivés $\mathrm{Tor}_n(M,-)$. Donc $(1) \Rightarrow (2)$

$(2) \Rightarrow (3)$ est trivial. $(4) \Rightarrow (1)$ est facile

$(3) \Rightarrow (4)$. On a des suites exactes courtes : $0 \to Z_0 \to F_0 \to M \to 0$ et $0 \to Z_i \to F_i \to Z_{i-1} \to 0$ pour $1 \leq i < d$ où $Z_i = \mathrm{Ker}\, \partial_i$

On a $Z_{d-1} \cong F_d$

Comme les $F_0, \dots, F_{d-1}$ sont plat, on a, pour tout A-module N

$$\mathrm{Tor}_j(Z_{i-1}, N) \cong \mathrm{Tor}_{j-1}(Z_i, N) \qquad j \geq 2$$

Donc $\mathrm{Tor}_1(F_d, N) \cong \mathrm{Tor}_1(Z_{d-1}, N) \cong \mathrm{Tor}_2(Z_{d-2}, N) \cong \dots \cong \underbrace{\mathrm{Tor}_{d+1}(Z_{-1}, N)}_{=0}$.

avec la convention $Z_{-1} = M$. $\Rightarrow F_d$ est plat. ☆

<u>Remarque</u> dimension projective 为省时间以下可以不讲. 但要讲 $\mathrm{dimplat.gl}(A) = \sup_M \mathrm{dimpl.}(M)$
M是有限生成模

① Soient A un anneau et M un A-module. On appelle dimension projective de A le plus petit entier $n \geq 0$ tel qu'il existe une résolution projective de A de longueur n, notée comme $\dim\mathrm{proj}(M)$.

On a les conditions équivalentes $\qquad R^n\mathrm{Hom}(M,N) \cong (R^n\mathrm{Hom}(M,-))(N) \cong (R^n\mathrm{Hom}(-,N))(M)$

(1) $\dim\mathrm{proj}(M) \leq d$ (2) $\mathrm{Ext}^n(M,N) = 0$ pour tout $n \geq d+1$ et tout A-module N

(3) $\mathrm{Ext}^{d+1}(M,N) = 0$ pour tout A-module N

(4) Si $0 \to P_d \to P_{d-1} \to \dots \to P_0 \to M \to 0$ est une résolution telle que $P_0, \dots, P_{d-1}$ soient projectifs, alors P_d est aussi projectif.

② Si A est un anneau noethérien et si M est un A-module de type fini, alors $\dim\mathrm{plat}(M) = \dim\mathrm{proj}(M)$

(les modules plat et de présentation finie sont localement libres de rang fini donc projectif)

on utilise aussi le fait que $\varinjlim$ préserve les objets projectifs (c'est un foncteur adjoint à gauche d'un foncteur exact)

<u>Remarque</u> dimension de platitude globale.

$$\mathrm{dim.plat.gl}(A) := \sup_M \dim\mathrm{plat}(M) \qquad \text{(}M\text{ parcourt l'ensemble des }A\text{-modules)}$$

= la même chose pour M parcourt l'ensemble des A-modules de type fini (car Tor préserve les limites inductives filtrantes) ← foncteur exact.

<u>Proposition</u> Pour tout anneau A, on a
可以不讲

$$\mathrm{dim.plat.gl}(A) = \sup_I \dim\mathrm{plat}(A/I)$$

où I parcourt tous les idéaux de A.

<u>Preuve</u> Soit M un A-module. Soit $0 \to F_d \to F_{d-1} \to \dots \to F_0 \to M \to 0$ une résolution de M telle que $F_0, \dots, F_{d-1}$ soient plat. Pour montrer que F_d est plat, il suffit de vérifier que $\mathrm{Tor}_1(F_d, A/I)\ (= \mathrm{Tor}_{d+1}(M, A/I)) = 0$ pour tout idéal I. (ou de façon équivalent, $I \otimes F_d \to F_d$ est injectif). Exercice.

Cela est vrai dès que $d \geq \sup_I \dim\mathrm{plat}(A/I)$.

2. Anneau régulier

Séance 5 (3)

Soit (A, m) un anneau local noethérien. Soit $k = A/m$

On dit que A est un anneau local régulier si $\dim(A) = rg_k(m/m^2)$.

Rappel sur la dimension de Krull

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de m dont les images dans m/m^2 forment une base sur k, on dit que $(x_i)_{i=1}^n$ est une suite régulière.

Soit A un anneau.

$$\dim(A) := \sup\{n, \text{ il existe une chaîne } \mathfrak{p}_n \supsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_0 \text{ d'idéaux premiers distincts de } A\}$$

Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, la codimension de $\mathfrak{p}$ est définie comme $\dim(A_\mathfrak{p})$.

Théorème d'idéaux principaux Soient A un anneau noethérien et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de A. Si P est un idéal premier de A qui est minimal parmi les idéaux premiers contenant $x_1, \dots, x_n$, alors $\mathrm{codim}(P) \leq n$.

Démonstration Quitte à remplacer A par A_P on peut supposer A local d'idéal maximal P.

Si $n=1$, alors A/Ax_1 est un anneau noethérien de dimension 0
$\leadsto$ anneau artinien local.

Soit $\mathfrak{p} \subsetneq P$ un idéal premier. Posons $\mathfrak{p}^{(a)} = \{r \in A \mid \exists s \in A \setminus \mathfrak{p},\ sr \in \mathfrak{p}^a\}$
c'est un idéal de A. $(\mathfrak{p}^{(a)} + Ax_1)_{a \geq 1}$ est une suite décroissante d'idéaux contenant Ax_1 $\leadsto$ stationnaire car A/Ax_1 est artinien

$\Rightarrow \exists\, a$ tel que $\mathfrak{p}^{(a)} \subset \mathfrak{p}^{(a+1)} + Ax_1$

tout $f \in \mathfrak{p}^{(a)}$ s'écrit sous la forme $g + \alpha x_1$ où $g \in \mathfrak{p}^{(a+1)} \subset \mathfrak{p}^{(a)}$

Comme $x_1 \notin \mathfrak{p}$, on a $\alpha \in \mathfrak{p}^{(a)}$. D'où $\mathfrak{p}^{(a)} = \mathfrak{p}^{(a+1)} + x\mathfrak{p}^{(a)}$.

D'après le lemme de Nakayama, on a $\mathfrak{p}^{(a)} = \mathfrak{p}^{(a+1)}$.

En outre, par définition, on a $\mathfrak{p}^{(a)} A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^a A_\mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p}^a A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{a+1} A_\mathfrak{p}$.

Encore par le lemme de Nakayama, on obtient $(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})^a = 0$ $\leadsto \dim(A_\mathfrak{p}) = 0$

Traitons maintenant le cas général par récurrence en n. On suppose que le théorème est démontré pour $n-1$. Soit P_1 un idéal premier de A contenu dans P. On suppose que $P_1 \subsetneq P$ et qu'il n'y a pas d'idéal premier entre les deux. Sans perte de généralité, on suppose que $x_n \notin P_1$

Par l'hypothèse qu'il n'y a pas d'idéal premier entre P_1 et P, P est le seul idéal premier de A qui contient $P_1+(x_n)$. Donc il existe un entier N, des $y_i \in P_1$ et des $b_i \in A$ $(1\leq i\leq n-1)$ tels que

$$\forall\, i\in\{1,\dots,n-1\} \quad x_i^N = y_i - b_i x_n.$$

Quitte à remplacer $x_1,\dots,x_{n-1}$ par $y_1,\dots,y_{n-1}$ on peut supposer que P_1 contient $x_1,\dots,x_{n-1}$. (Un idéal premier contient $x_1,\dots,x_n$ si et seulement s'il contient ~~y_1~~ $y_1,\dots,y_{n-1},x_n$)

D'après le cas $n=1$ démontré plus haut, l'image canonique de P dans $A/(x_1,\dots,x_{n-1})$ est de codimension ≤ 1. Donc P_1 est minimal parmi les idéaux premiers de A contenant $x_1,\dots,x_{n-1}$. $\rightsquigarrow$ P_1 est de codim $\leq n-1$.

Le théorème est donc démontré.

#

<u>Application</u> Si (A,m) est un anneau local noethérien, alors $\dim A \leq rg_k(m/m^2)$. (Nakayama)

① Si (A,m) est un anneau local régulier et si $x_1,\dots,x_d$ sont des éléments de m dont les images dans m/m^2 sont linéairement indépendants sur $k=A/m$, alors $A'=A/(x_1,\dots,x_d)$ est régulier. (Par récurrence il suffit de traiter les cas où $d=1$)

<u>Lemme</u> Soit (A,m) un anneau local noethérien. Soit $f\in m$. On a $\dim(A/fA) \geq \dim A-1$. (L'égalité est vraie lorsque f n'est pas un diviseur de zéro. plus tard.)

<u>Démonstration</u> Soit $P_d \supsetneq P_{d-1} \supsetneq \dots \supsetneq P_0$ une chaîne d'idéaux premiers de A, telle que $f\in P_d$. On démontre par récurrence qu'il existe une autre chaîne $Q_d \supsetneq Q_{d-1} \supsetneq \dots \supsetneq Q_1$ d'idéaux premiers telle que $f\in Q_1$ et $Q_d=P_d$. On peut supposer $f\notin P_{d-1}$ (sinon on applique l'hyp. de récurrence). Soit Q_{d-1} un élément minimal parmi les idéaux premiers contenant $P_{d-2}+fA$ et contenus dans P_d. Alors on a $P_{d-2}\subsetneq Q_{d-1}$. De plus, par l'hypothèse de récurrence, il existe une chaîne $Q_{d-1}\supsetneq \dots \supsetneq Q_1$ d'idéaux premiers tels que $f\in Q_1$. Enfin, d'après le théorème, l'image de Q_{d-1} dans A/P_{d-2} est un idéal premier de codimension ≤ 1, tandis que celle de P_d dans A/P_{d-2} est de codimension ≥ 2. Donc $Q_{d-1}\subsetneq P_d$. Cela montre que $\dim(A/fA)\geq \dim A-1$

Démonstration de ①

Soit $n = \dim A$. Soit m' l'image de m dans $A/(x_1, \dots, x_d)$.
Comme m' est engendré par $n-d$ éléments (Nakayama), il s'avère que $rg_k(m'/m'^2) \leq n-d$. D'après le lemme on a

$$n-d \leq \dim(A') \leq rg_k(m'/m'^2) \leq n-d.$$

Donc on a l'égalité partout. ⁂

② Tout anneau local régulier (A,m) est intègre. Si $d=0$, alors $m=0$. A est un corps

Démonstration On raisonne par récurrence sur $d = \dim A$. Soit f un élément dans $m \setminus m^2$. alor A/fA est un anneau local régulier de dimension $d-1$.
Donc A/fA est un anneau intègre (par l'hypothèse de récurrence)
$\rightsquigarrow$ fA est un idéal principal premier. (qui est de codimension ≤ 1)
Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier strictement contenu dans fA, alors $\mathfrak{p} \subset f^nA$ pour tout n (Si $x = af^n \in \mathfrak{p}$, alors $a \in \mathfrak{p}$ car $f \notin \mathfrak{p}$. donc $a = bf$ pour certain $b \in A$). $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{p} \subset \bigcap_{n \geq 1} f^nA = \{0\}$ (Nakayama)
Si, pour tout $f \in m \setminus m^2$, fA est un idéal premier minimal, alors m est contenu dans l'union de m^2 et les idéaux premiers minimaux de A (il n'y a qu'un nombre fini). On en déduit que m est minimal et $d=0$.

Lemme Soient R un anneau et $I_1, \dots, I_n$, J des idéaux de R.
On suppose qu'il y a au plus deux idéaux non-premiers parmi les $I_1, \dots, I_n$. Si $J \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $J \subset I_i$.

Preuve Le cas où $n=1$ est trivial. On suppose que $n \geq 2$ et que le résultat est vrai pour $n-1$. Par l'hypothèse de récurrence, si J n'est contenu dans aucun idéal de la forme I_i, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $J \not\subset \bigcup_{j \neq i} I_j$.
On choisit un élément $a_i \in J \setminus \bigcup_{j \neq i} I_j$. Si $n=2$, alors $a_1 + a_2 \notin I_1 \cup I_2$, une contradiction. Si $n \geq 3$, sans perte de généralité, on peut supposer que I_1 est premier. Dans ce cas là $a_1 + a_2 \cdots a_n$ n'est pas dans $\bigcup_{1 \leq i \leq n} I_i$. une contradiction aussi.

Définition Soient A un anneau, M un A-module et $(a_i)_{i=1}^n$ une suite d'élément dans A. On dit que $(a_i)_{i=1}^n$ est M-régulière si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'endomorphisme de $M / \sum_{1 \leq j \leq i-1} a_j M$ l'homothétie par a_i est injectif. Si $M = A$, on dit simplement que $(a_i)_{i=1}^n$ est une suite régulière.

Corollaire Si (A, m) est un anneau local régulier et si $(a_i)_{i=1}^n$ est une famille d'éléments dans m dont les images dans m/m^2 forment une base de m/m^2 sur A/m, alors $(a_i)_{i=1}^n$ est une suite régulière.

Proposition Soient (A, m) un anneau local noethérien, et k son corps résiduel. Pour tout A-module de type fini M, on a

$$\text{dim.plat}(M) = \sup\{d \mid \text{Tor}_d(M, k) \neq 0\}.$$

Démonstration On a vu que $\text{dim.plat}(M) \leq d \Rightarrow \text{Tor}_{d+1}(M, k) = 0$.
Il suffit de montrer la réciproque. Soit $n = \text{rg}_k(M/mM)$. Par Nakayama M est engendré par n éléments $\{x_1, \dots, x_n\}$. On désigne par $\varphi: A^n \to M$ l'homomorphisme surjectif qui envoie la base canonique de A^n en $\{x_1, \dots, x_n\}$.
Soit N le noyau de φ. On raisonne par récurrence en d.
Si $d \neq 0$, alors $\text{Tor}_{d+1}(M, k) = \text{Tor}_d(N, k)$ et $\text{dim.plat}(M) \leq 1 + \text{dim.plat}(N)$ (on construit explicitement une résolution plate)
on peut utiliser l'hypothèse de récurrence.
Si $d = 0$, alors $\text{Tor}_1(M, k) = 0$ montre que l'on a un diagramme dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N \otimes k & \to & A^n \otimes k & \to & M \otimes k & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \to & N/mN & \to & k^n & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & M/mM & \to & 0 \end{array}$$

Comme $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme, on obtient $N = 0$ par Nakayama.

Corollaire avec les notation de la proposition, on a $\text{dim.plat.gl}(A) = \text{dim.plat}_A(k)$

Complexe de Koszul

Soit R un anneau. Si x est un élément de R, on désigne par $K(x)$ le complexe de chaîne $0 \to R \xrightarrow{d} R \to 0$, où d est défini comme l'homothétie par x.

$\underset{\text{degré } 1}{R}$ $\underset{\text{degré } 0}{R}$

On désigne par e_x le générateur canonique dans R au degré 1. d'où $d(e_x) = x$.

Si A est un complexe de chaîne (de R-modules), on désigne par $K(x) \otimes A$ le complexe de chaîne obtenu comme le cône de $-x : A \to A$ (homothétie)

Rappelons que. Si $B = K(x) \otimes A$, alors $B_n = A_{n-1} \oplus A_n$ et d_B est donné par la matrice $\begin{pmatrix} -d_A & 0 \\ x & d_A \end{pmatrix}$.

c'est un vrai produit tensoriel de complexes. c.f. Godement

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille d'éléments dans R, on désigne par $K(x_1, \cdots x_n)$ le complexe $K(x_n) \otimes \cdots \otimes K(x_1)$.

<u>Théorème</u> $K(x_1, \cdots, x_n)$ est une résolution de R/I, où $I = Rx_1 + \cdots + Rx_n$, pourvu que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une suite régulière dans R.

<u>Démonstration</u> On raisonne par récurrence sur n. Le cas où $n=1$ est trivial. Soit A le complexe $K(x_1, \cdots, x_{n-1})$. on a $B := K(x_1, \cdots, x_n) = K(x_n) \otimes A$

On a une suite exacte

$$H_{p+1}(A) \to H_{p+1}(A) \to H_{p+1}(B) \to H_p(A) \to H_p(A) \to H_p(B) \to \cdots \to H_1(A) \to H_1(B)$$
$$\to H_0(A) \xrightarrow{-x_n} H_0(A) \to H_0(B) \to 0$$

on en déduit que $H_p(B) = 0$ pour $p > 1$

Si $x_n : H_0(A) \to H_0(A)$ est injectif, alors

$$H_1(B) = 0. \quad \text{et} \quad H_0(B) = (R/Rx_1 + \cdots + Rx_{n-1}) / R x_n (R / Rx_1 + \cdots + Rx_{n-1}) \cong R/I$$ #

<u>Corollaire</u> Si (A, m) est un anneau local régulier, alors

$$\text{dim plat. gl}(A) = \dim A$$

(la réciproque est aussi vraie mais inutile dans ce cours).