2. Schémas quasi-projectifs

Soient S un schéma, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent, L un $\mathcal{O}_S$-module inversible. Si $f : \mathcal{F} \to L$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-modules, on appelle lieu de base de f (noté comme $B(f)$) le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal quasi-cohérent l'image de l'homomorphisme

$$1 \otimes \mathcal{F} : L^\vee \otimes \mathcal{F} \longrightarrow L^\vee \otimes L \cong \mathcal{O}_S$$

On dit que f définit un quotient inversible de $\mathcal{F}$ (ou sans lieu de base) si $B(f) = \emptyset$. (ssi f est surjectif)

<u>Théorème</u> Soient S un schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. Le foncteur $\underline{\mathrm{Sch}}_S^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$, qui associe à chaque morphisme de schémas $\varphi : X \to S$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de quotients inversibles de $\varphi^*\mathcal{F}$, est représenté par un S-schéma que l'on note $\mathbb{P}(\mathcal{F})$

<u>Remarque</u> ① Si on désigne par $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to X$ le morphisme structural, alors l'objet universel est un quotient inversible de $\pi^*(\mathcal{F})$ que l'on note comme $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1)$

② Si $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ est un homomorphisme surjectif, alors on a un morphisme naturelle $\mathbb{P}(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$ qui est une immersion fermée.

③ Si $\varphi : X \to S$ est un S-schéma et si $f : \varphi^*(\mathcal{F}) \longrightarrow L$ est un homomorphisme vers un $\mathcal{O}_X$-module inversible, alors f induit un morphisme de S-~~schémas~~ de $X \setminus B(f) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F})$.

<u>Définition</u> Soient S un schéma et $\varphi : X \to S$ un S-schéma. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est très ample relativement à φ s'il existe un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$ et une S-immersion $X \xrightarrow{i} \mathbb{P}(\mathcal{F})$ tels que $L \cong i^*\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1)$. Si $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ on dit que L est très ample.
(i.e. L est sans lieu de base, et $X \longrightarrow \mathbb{P}(\varphi_* L)$ est une S-immersion).

<u>Proposition</u>(*) Soient X un schéma quasi-compact et quasi-séparé, L un $\mathcal{O}_X$-module inversible, et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. On fixe une section $s \in \Gamma(X, L)$. On désigne par X_s le complémentaire du lieu de base de l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to L$ induit par s.

(1) Si f est un élément de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ dont la restriction à X_s s'annule, alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $s^n f = 0$ dans $\Gamma(X, L^{\otimes n} \otimes \mathcal{F})$

(2) Si g est un élément de $\Gamma(X_s, \mathcal{F})$, alors il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que, $\forall n \geq n_0$, la section $(s^n|_{X_s}) \cdot g$ soit dans l'image de l'application de restriction $\Gamma(X, L^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X_s, L^{\otimes n} \otimes \mathcal{F})$.

Démonstration (1) (Il suffit de supposer X quasi-compact) On peut se ramener au cas où X est affine et L est trivial. Soit $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ alors $\Gamma(X_s, \mathcal{F}) = M_s$. Si l'image de f dans M_s s'annule alors il existe n tel que $s^n f = 0$.

(2) On écrit $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ où U_i est un ouvert affine tel que $L|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ et I est fini. Pour tout i, soient $A_i = A(U_i)$ et $M_i = \Gamma(U_i, \mathcal{F})$. Soit s_i la restriction de s à U_i. Le schéma $X_s \cap U_i$ est affine d'anneau $A_i[s_i^{-1}]$ et $\mathcal{F}|_{X_s \cap U_i}$ correspond à $M_i[s_i^{-1}]$.

$\rightsquigarrow$ $\exists\, m \geq 1$ tel que $\forall i \in I$, $(s_i^m|_{X_s \cap U_i})(g|_{X_s \cap U_i})$ se relève en une section $\in \Gamma(U_i, L^{\otimes m} \otimes \mathcal{F})$. Pour tout $(i,j) \in I^2$, soit $\alpha_{ij} = h_i|_{U_i \cap U_j} - h_j|_{U_i \cap U_j}$. On a $\alpha_{ij}|_{X_s \cap U_i \cap U_j} = 0$.

Comme $U_i \cap U_j$ est quasi-compact, il existe $a_{ij} \geq 0$ tel que $(s|_{U_i \cap U_j})^{a_{ij}} \alpha_{ij} = 0$

$\Rightarrow$ pour n suffisamment grand, $(s_i^{n-m} h_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j^{n-m} h_j)|_{U_i \cap U_j}$

Par recollement on obtient le résultat. ∗

Définition Soit X un schéma quasi-compact et quasi-séparé. (1) On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est ample si, pour tout $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathcal{F}$ de type fini, il existe un entier $n_0 = n_0(\mathcal{F})$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes n}$ soit engendré par ses sections au-dessus de X.

(2) On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module inversible L est sans lieu de base si l'homomorphisme naturel $\pi^* \pi_* L \to L$ est surjectif, où $\pi : X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est le morphisme canonique

Propriétés

① Si L et L' sont deux fibrés inversibles sans lieu de base, alors il en est de même de $L \otimes L'$

$$\pi^*(\pi_*(L) \otimes \pi_*(L')) \longrightarrow \pi^*\pi_*(L\otimes L') \longrightarrow L\otimes L' \text{ est surjective}$$

② Si L est ample, pour tout fibré inversible L' sans lieu de base, $L\otimes L'$ est ample.

③ Si L est ample, pour tout fibré inversible L', il existe $n_0 \geq 0$ tel que, $\forall\, n \geq n_0$, $L^{\otimes n} \otimes L'$ est ample et sans lieu de base

④ L est ample $\Longleftrightarrow$ $\exists\, n\geq 1$, $L^{\otimes n}$ est ample $\Longleftrightarrow$ $\forall n \geq 1$, $L^{\otimes n}$ est ample.

⑤ Si L et L' sont amples, alors il en est de même de $L \otimes L'$.

Proposition Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, $\varphi : X \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé. Si L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible qui est très ample relativement à φ, alors il est ample.

Proof Il existe un A-module E et un homomorphisme surjectif $\varphi^*E \longrightarrow L$ qui induit $\bigoplus_{n\geq 1} \operatorname{Sym}^n \varphi^* E \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 1} L^{\otimes n}$.

Par définition, $\mathbb{P}(E) = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 1} \operatorname{Sym}^n E\right)$ et $H^0(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_E(n)) = \operatorname{Sym}^n E$.

De plus, les ouverts de la forme $\mathbb{P}(E)_u$ où $u \in \bigcup_{n\geq 1} \operatorname{Sym}^n E$ forment une base de topologie de $\mathbb{P}(E)$. Par conséquent, les ouverts de X de la forme X_s où $s \in \bigcup_{n\geq 1} H^0(X, L^{\otimes n})$ forment une base de topologie de X.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. Il existe un entier d (suffisamment divisible) et une famille finie $(s_i)_{i=1}^n$ d'éléments dans $H^0(X, L^{\otimes d})$ telles que

$\forall i$, $\mathcal{F}|_{X_{s_i}}$ est un quotient d'un $\mathcal{O}_{X_{s_i}}$-module libre de rg fini

D'après la proposition (*), si g est une section dans $\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{F})$, il existe un entier n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$, $s_i^n g$ se prolonge en une section globale. Par conséquent, pour n suffisamment grand, $L^{\otimes dn} \otimes \mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales. Donc $L^{\otimes d}$ est ample, et L est ample *

Proposition Soient $S = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, $\varphi : X \to S$ un morphisme quasi-séparé et de type fini, et L un $\mathcal{O}_X$-module ample. Il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, $L^{\otimes n}$ est très amples relativement à φ.

Démonstration Le point clé est de montrer l'assertion suivante :

$\forall\ x \in X$, il existe un voisinage ouvert affine de x de la forme X_s avec $s \in \bigcup_{n \geq 1} \Gamma(X, L^{\otimes n})$

Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert affine de x où L se trivialise. Soit $\mathcal{J}$ un faisceau d'idéaux qui définit un sous-schéma fermé dont l'espace topologique sous-jacent est $X \setminus \mathcal{U}$.

Pour tout entier n, soit $\mathcal{J}_n$ l'image de l'homomorphisme canonique

$$\varphi^*(\varphi_*(\mathcal{J} \otimes L^{\otimes n})) \otimes L^{\vee \otimes n} \longrightarrow \mathcal{J}$$

Comme X est quasi-compact, $\mathcal{J}$ est la limite inductive des sous-modules de type fini.

Il s'avère que, pour tout sous-$\mathcal{O}_X$-module de type fini $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}_n$, d'où $\mathcal{J} = \sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_n$.

Il existe alors $s \in \Gamma(X, \mathcal{J} \otimes L^{\otimes n}) \subset \Gamma(X, L^{\otimes n})$ tel que $s(x) \neq 0$, ou de façon équivalente, $x \in X_s \subset \mathcal{U}$. Comme L se trivialise sur $\mathcal{U}$ on obtient que X_s est un sous-schéma ouvert de U défini par la non-annulation d'une fonction régulière, donc un schéma affine.

Comme X est quasi-compact, il existe un entier $d \geq 1$ et une famille finie de sections $(s_i)_{i=1}^n$ dans $\Gamma(X, L^{\otimes d})$ telle que $(X_{s_i})_{i=1}^n$ forment un recouvrement de X par des ouverts affines. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'anneau de X_{s_i} est une A-algèbre de type fini. Soit $(f_{ij})_{j \in J_i}$ une famille de générateurs de $A(X_{s_i})$ comme A-algèbre. Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $s_i^r f_{ij}$ se prolonge en une section $\underbrace{\text{de}}_{s_{ij}}$ $L^{\otimes rd}$ quels que soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in J_i$. (car X est quasi-compact et quasi-séparé)

Considérons le morphisme canonique $X \xrightarrow{\eta} \mathbb{P}(\Gamma(X, L^{\otimes rd})) = P$ induit par l'homomorphisme canonique $\varphi^*(\varphi_*(L^{\otimes rd})) \longrightarrow L^{\otimes rd}$ (surjectif).

$$\text{On a } X_{s_i} = \eta^{-1}(P_{s_i^r}) \text{ pour tout } i.$$

En outre, $P_{s_i^r}$ est un schéma affine, et l'homomorphisme d'anneaux $A(P_{s_i^r}) \longrightarrow A(X_{s_i})$ envoie s_{ij}/s_i^r en f_{ij}, donc est surjectif.

On en déduit que $\eta : X_{s_i} \longrightarrow P_{s_i^r}$ est une immersion fermée *

Remarque Soient $f : X \to S$ un morphisme de schémas quasi-compact et q-s. et L et L' deux $\mathcal{O}_X$-modules inversibles. Si L est très ample relativement à f et si $f^*(f_*(L')) \to L'$ est surjectif, alors $L \otimes L'$ est très ample relativement à f.

En effet, il existe un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent $\mathcal{E}$ et une S-immersion $j : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ tel que $j^* \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1) \cong L$. En outre, l'homomorphisme surjectif $f^* f_* L' \to L'$ induit un S-morphisme $j' : X \to \mathbb{P}(f_* L')$ tel que $j'^* \mathcal{O}(1) \cong L'$. Le morphisme $(j, j') : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbb{P}(f_* L')$ est alors une immersion car j l'est (exercice). On utilise alors le morphisme de Segre $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbb{P}(f_* L') \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes f_* L')$ pour conclure (c'est une immersion fermée).

Proposition Soit X un schéma noethérien, régulier, qui possède un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample L. Tout $\mathcal{O}_X$-module de type fini $\mathcal{F}$ admet une résolution par des $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, dont la longueur bornée par la dimension de X

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E ainsi qu'un homomorphisme surjectif $E \to \mathcal{F}$.
En effet, comme L est ample, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $L^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$ soit engendré par des sections globales. Autrement dit, il existe un $\mathcal{O}_X$-module libre $\mathcal{O}_X^{\oplus N} \to L^{\otimes n} \otimes \mathcal{F}$ (et un homomorphisme surjectif) qui induit un homomorphisme surjectif $(L^{\vee \otimes n})^{\oplus N} \to \mathcal{F}$. Par récurrence, on peut construire une résolution

$$0 \to E_r \to E_{r-1} \to \cdots \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

telle que $E_0, \dots, E_{r-1}$ soient localement libre de rang fini. Comme chaque anneau local de X est régulier de dimension $\leq r$, on obtient que E_r est localement libre (de rang fini car de type fini).
Le résultat est donc démontré.

§ 3. Groupe de Grothendieck.

Soit X un anneau noethérien connexe. On désigne par $K^\circ(X)$ le groupe abélien libre engendré par les $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, modulo le sous-groupe engendré par les éléments de la forme

$$[E] - [E'] - [E''] \quad \text{où}$$

$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ parcourt l'ensemble des suite exacte courte de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres (de rang fini).

On désigne par $K(X)$ le groupe abélien libre engendré par les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérent de type fini, modulo les suites exactes de $\mathcal{O}_X$-modules.

On a un homomorphisme naturel de groupes de $K^\circ(X) \xrightarrow{\alpha} K(X)$.

<u>Proposition</u> Soit $0 \to \mathcal{F}_n \xrightarrow{d_n} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to \mathcal{F}_0 \to 0$ un complexe borné de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérent de type fini. on a

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\mathcal{F}_i] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [H_i(\mathcal{F}.)]$$

En particulier, si le complexe est exact, alors $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\mathcal{F}_i] = 0$.

<u>Démonstration</u> Pour tout i, soit Z_i le noyau de d_i et B_i l'image de d_{i+1}. On a des suites exactes

$$0 \to B_i \to Z_i \to H_i \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad [B_i] + [H_i] = [Z_i]$$

$$0 \to Z_i \to \mathcal{F}_i \to B_{i-1} \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad [B_{i-1}] + [Z_i] = [\mathcal{F}_i]$$

$$\rightsquigarrow \sum_i (-1)^i \big([B_i] + [H_i]\big) + \sum_i (-1)^i \big([B_{i-1}] + [Z_i]\big) = \sum_i (-1)^i \big([Z_i] + [\mathcal{F}_i]\big)$$

\#

<u>Corollaire</u> $\alpha : K^\circ(X) \to K(X)$ est surjective pourvu que X est régulier et quasi-projectif

(Il suffit d'appliquer la proposition à une résolution d'un $\mathcal{O}_X$-module cohérent).

<u>Lemme</u> Soit X un anneau nothérien, régulier et quasi-projectif (qui possède un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample). Supposons donnés un homomorphisme surjectif $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, et une résolution

$$0 \to F_r \to \cdots \to F_0 \to \mathcal{G} \to 0$$

par des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini, où $r = \dim X$, il existe une résolution $0 \to E_r \to \cdots \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$ de $\mathcal{F}$ par des modules localement libres de rang fini, ainsi qu'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_r \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (*)$$

dont chaque flèche verticale est surjectif.

Démonstration. On choisit un homomorphisme surjectif d'un $\mathcal{O}_X$-module localement libre E_0 vers le produit fibré de
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F} \arrow[d, two heads] \\ F_0 \arrow[r] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Supposons que $E_0, \dots, E_i$ sont construits.

Soient $\mathcal{F}_i = \mathrm{Ker}(E_i \to E_{i-1})$, $\mathcal{G}_i = \mathrm{Ker}(F_i \to F_{i-1})$. On a un diagramme
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_i \arrow[d, two heads] \\ F_{i+1} \arrow[r] & \mathcal{G}_i \end{tikzcd}$$

On choisit un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E_{i+1} et un homomorphisme surjectif de E_{i+1} vers le produit fibré de ce diagramme. sauf dans le cas où $i = r-1$. on choisit E_r comme le produit fibré du diagramme. Dans ce cas-là E_r est automatiquement localement libre. Le résultat est ainsi démontré.

Remarque ① Dans le cas où $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ est l'homomorphisme d'identité $\mathcal{F} = \mathcal{F}$. on dit que la résolution $E_\bullet$ domine $\mathcal{F}_\bullet$. En utilisant un argument similaire à la démonstration, on peut montrer que, si $E'_\bullet$ et $E''_\bullet$ sont deux résolutions de $\mathcal{F}$, alors il existe une résolution $E_\bullet$ qui domine tous les deux

② Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E_r \arrow[r] \arrow[d, "f_r"'] & \cdots \arrow[r] & E_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Si on désigne par K_i le noyau de l'homomorphisme $f_i : E_i \to F_i$ alors $0 \to K_r \to \cdots \to K_r \to K \to 0$ est une résolution de $K = \mathrm{Ker}(f)$

On construit un homomorphisme de $K(X)$ vers $K^\circ(X)$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini et si

$$0 \to E_r \to E_{r-1} \to \cdots \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

Cette somme ne dépend pas du choix de résolution.

l'application envoie $[\mathcal{F}]$ en $\sum_{i=0}^{r} (-1)^i [E_i]$. Si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules, alors l'image de $[\mathcal{F}]-[\mathcal{F}']-[\mathcal{F}'']$ est nul. On a donc construit l'inverse de l'homomorphisme α.

<u>Cohomologie de faisceaux sur un espace projectif</u>

Soit A un anneau. On désigne par $\mathbb{P}^d_A$ le fibré projectif $\mathbb{P}(A^{d+1})$ $\simeq \mathrm{Proj}(A[T_0, \cdots, T_d])$. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré inversible universel.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{O}(n) := \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$.

On utilisera dans la suite le fait:

$$H^0(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n)) = \mathrm{Sym}^n(A^{d+1}) \cong A^{\binom{n+d}{d}} \qquad H^i(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n)) \simeq H^0(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(-n-i-1))^\vee$$

$$H^i(\mathbb{P}^d_A, \mathcal{O}(n)) = 0 \quad \text{pour tout } i > 0 \text{ et tout } n \geq 1.$$

<u>Théorème</u> (Serre) Soient A un anneau noethérien, X un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^d_A$ et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. Alors

(1) pour tout entier $p \geq 0$, $H^p(X, \mathcal{F})$ est un A-module de type fini

(2) Il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier $p \geq 1$, on a $H^p(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ (où $\mathcal{F}(n)$ est défini comme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(n)$).

On peut supposer $X = \mathbb{P}^d_A$ car $i_* \mathcal{F}$ est cohérent.

<u>Démonstration</u>. On raisonne par récurrence sur p. D'abord pour tout $p > \dim \mathbb{P}^d_A$ et tout $n \geq 1$, on a $H^p(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.

Passage de $p+1$ à p: Il existe un entier k_p tel que $\mathcal{F}(k_p)$ soit engendré par un nombre fini de sections globales

$$\rightsquigarrow \quad 0 \to \mathcal{I}_p \to \mathcal{O}_X^{\oplus m_p} \to \mathcal{F}(k_p) \to 0$$

$\mathcal{I}_p$ étant de type fini, on choisit $a_p \in \mathbb{N}^*$ tel que $H^{p+1}(X, \mathcal{I}_p(n)) = 0$ pour $n \geq a_p$. Or on a

$$H^p(X, \mathcal{O}(n)^{\oplus m_p}) \to H^p(X, \mathcal{F}(k_p+n)) \to H^{p+1}(X, \mathcal{I}_p(n))$$

donc $H^p(X, \mathcal{F}(k_p+n)) = 0$ lorsque $p \geq 1$.