Chapitre V λ-anneaux

§1 Polynômes symétriques. Soit A un anneau. Soit $r \geq 1$ un entier.

Considérons $F(X_1, \dots, X_r, T) = \prod_{i=1}^{r} (T + X_i) \in A[X_1, \dots, X_r, T]$

qui s'écrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^{r} s_i^{(r)}(X_1, \dots, X_r)\, T^{r-i}$$

où $s_i^{(r)}$ est un polynôme homogène de degré i dans $A[X_1, \dots, X_r]$ appelé le $i^{\text{ème}}$ polynôme symétrique fondamental.

polynôme symétrique : invariant par l'action de $\mathfrak{S}_r$.

<u>Théorème</u> L'homomorphisme de $A[Y_1, \dots, Y_r]$ vers $A[X_1, \dots, X_r]^{\mathfrak{S}_r}$ qui envoie $F \in A[Y_1, \dots, Y_r]$ en $F(s_1^{(r)}(X_1, \dots, X_r), \dots, s_r^{(r)}(X_1, \dots, X_r))$ est un isomorphisme de A-algèbres.

(autrement dit, tout polynôme symétrique s'écrit de façon unique sous la forme $F(s_1^{(r)}, \dots, s_r^{(r)})$.)

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de variables, on omet (r)

§2 pré-λ-anneaux.

<u>Définition</u> K un anneau commutatif. On appelle structure de pré-λ-anneau sur K tout morphisme de groupes de $(K, +)$ vers $(\Lambda(K) := 1 + TK[[T]], \times)$ tel que $\Lambda(a) \in 1 + aT + T^2K[[T]]$ pour tout $a \in K$.

① (K, λ) est appelé un pré-λ-anneau.

② Si $a \in K$, on désigne par $\lambda_k(a)$ le coefficient de T^k dans la série $\lambda(a)$.

③ On a $\lambda_k(a+b) = \sum_{i+j=k} \lambda_i(a)\lambda_j(b)$.

Si K et K' sont deux pré-λ-anneaux. On appelle morphisme de K vers K' tout morphisme d'anneaux $f : K \to K'$ tel que $\forall a \in K$ et $k \in \mathbb{N}$ on a $f(\lambda_k(a)) = \lambda_k(f(a))$. Si de plus f est injectif, on dit que K'/K est une ext.

exemple ① $\lambda : \mathbb{Z} \to \Lambda(\mathbb{Z})$ $\lambda(a) = (1+T)^a$

② Si K est un pré-λ-anneau et I est un idéal de K tel que, $\forall a \in I$, $\lambda(a) \in 1 + TI[[T]]$, alors λ induit par passage au quotient une structure de pré-λ-anneau sur K/I.

$\pi : K \to K/I$ est un morphisme de pré-λ-anneaux

③ Soit X un schéma noethérien connexe.

$$\lambda_k([E]) = [\Lambda^k E] \qquad (k \geq 1)$$

définit une structure de pré-λ-anneau sur $K^0(X)$.

En effet, si $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est une suite exacte courte, alors
$$[\Lambda^k E] = \sum_{j=0}^{k} [(\Lambda^j E') \otimes (\Lambda^{k-j} E'')] \qquad (*)$$

Soit F^i l'image de l'homomorphisme canonique
$$(\Lambda^i E') \otimes (\Lambda^{k-i} E) \longrightarrow \Lambda^k E$$
défini par la structure d'algèbre sur $\bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(E)$. On a une filtration
$$\Lambda^k E = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^k = \Lambda^k E' \supset F^{k+1} = 0.$$
En outre, on a $(\Lambda^i E') \otimes (\Lambda^{k-i} E'') \cong F^i / F^{i+1}$.

Donc on obtient $(*)$.

④ Soit K un pré-λ-anneau. L'anneau des polynômes $K[X]$ est naturellement muni d'une structure de pré-λ-anneau de sorte que
$$\lambda\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \prod_{i=0}^{n} \lambda(a_i)(X^i T).$$

⑤ Soit K un anneau. Le groupe abélien $(\Lambda(K), \times)$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. En effet, le polynôme
$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 + U_i V_j T) \in \mathbb{Z}[U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots V_m, T]$$

est symétrique par rapport à $(U_1, \ldots, U_n)$ et $(V_1, \ldots, V_m)$ respectivement.

$\leadsto$ il existe $P_k \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k]$ t.q.
$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 + U_i V_j T) = \sum_{0 \leq k \leq mn} P_k(s_1^{(n)}(\underline{U}), \ldots, s_k^{(n)}(\underline{U}), s_1^{(m)}(\underline{V}), \ldots, s_k^{(m)}(\underline{V}))\, T^k$$

- Si $k \leq \min(n,m)$, alors P_k est uniquement déterminer et ne dépend pas de (n,m).

On peut donc choisir P_k qui ne dépend pas de (n,m).

Pour les séries $F = 1 + a_1T + a_2T^2 + \cdots$ et $G = 1 + b_1T + b_2T^2 + \cdots$ dans $\Lambda(K)$, on définit

$$F \circ G = 1 + \sum_{k\geq 1} P_k(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k)\, T^k$$

Proposition $(\Lambda(K), \times, \circ)$ est un anneau commutatif et unifère.

associativité : $\prod_{i,j,k}(1+U_iV_jW_kT) = \prod_i \prod_{j,k}(1+U_iV_jW_kT) = \prod_k \prod_{i,j}(1+\cdots)$

distributivité

$$\prod_{i=1}^{n+m}\prod_{j=1}^{p}(1+U_iV_jT) = \left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{p}(1+U_iV_jT)\right)\left(\prod_{i=n+1}^{n+m}\prod_{j=1}^{p}(1+U_iV_jT)\right).$$

élément neutre $= 1$

élément unité $= 1+T$

$(1+aT)\circ(1+bT) = 1+abT$

en général. Si $F(T) = 1 + a_1T + a_2T^2 + \cdots$

alors $F(T)\circ(1+bT) = 1 + \sum_{n\geq 1} b^n a_n T^n$.

En particulier, si $b \in K^\times$, alors $F(T)\circ(1+bT) = 1$ entraîne $F(T) = 1$. autrement dit, $1+bT$ est un non-diviseur de zéro dans $(\Lambda(K), \times, \circ)$.

Structure de pré-λ-anneau sur $\Lambda(K)$.

Il existe des polynômes $P_{k,j} \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{jk}]$ tel que

$$\prod_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r}(1+U_{i_1}\cdots U_{i_k}T) = \sum_{j\geq 0} P_{k,j}(s_1^{(r)}(\underline{U}), \dots, s_{kj}^{(r)}(\underline{U}))\, T^j$$

(on peut choisir $P_{k,j}$ indépendants de r).

$\lambda : (\Lambda(K), \times) \longrightarrow \Lambda(\Lambda(K))$ qui envoie $1 + \sum_{k\geq 1} a_k T^k$ en

$$1 + \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j\geq 0} P_{k,j}(a_1, \dots, a_{kj})\, T^j\right) X^k$$

est un morphisme de groupes

⚠ dans $\Lambda(K)$, la loi "d'addition" est la multiplication des séries.

⑥ Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ un anneau gradué (commutatif et unifère).
On désigne par $\Lambda^0(A)$ le sous-ensemble de $\Lambda(A)$ des séries
$1+\xi_1 T + \xi_2 T^2 + \cdots$ avec $\xi_k \in A_k$ $(\forall k)$.

- le produit de deux séries dans $\Lambda^0(A)$ reste dans $\Lambda^0(A)$
- l'inverse d'une série dans $\Lambda^0(A)$ reste dans $\Lambda^0(A)$.

$\rightsquigarrow$ $\Lambda^0(A)$ est un sous-groupe de $\Lambda(A)$.

On défini une loi de composition $\times$ sur $\mathbb{Z}\times\Lambda^0(A)$

$$(n,f)\times(m,g) := (n+m, fg)$$

Si n et m sont deux entiers ≥ 0. considérons

$$(*) \qquad \prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \left(1+(U_i+V_j)T\right) \in \mathbb{Z}[U_1,\dots,U_n,V_1,\dots,V_m,T].$$

qui est symétrique en $(U_i)_{i=1}^n$ et $(V_j)_{j=1}^m$. $\rightsquigarrow \exists\ Q_k^{(n,m)}$ tels que

$$(*) = \sum_{0\leq k\leq nm} Q_k^{(n,m)}\left(s_1^{(n)}(\underline{U}),\dots,s_k^{(n)}(\underline{U}), s_1^{(m)}(\underline{V}),\dots,s_k^{(m)}(\underline{V})\right)T^k$$

Si $f = 1+\xi_1T+\xi_2T^2+\cdots$ et $g = 1+\eta_1T+\eta_2T^2+\cdots$ sont dans $\Lambda^0(A)$.
on définit $(n,f)*(m,g)$ comme (nm,h), où

$$h = 1+\sum_{k\geq 1} Q_k^{(n,m)}(\xi_1,\dots,\xi_k,\eta_1,\dots,\eta_k)T^k$$

$*$ définit une structure de semi-groupe sur $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\Lambda^0(A)$.
qui est distributive par rapport à $\times$. Donc $*$ s'étend à
$\mathbb{Z}\times\Lambda^0(A)$ et ainsi $(\mathbb{Z}\times\Lambda^0(A),\times,*)$ devient un anneau
commutatif.

Similairement. $\exists\ Q_{k,j}^{(r)} \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_{jk}]$ tels que

$$\prod_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r}\left(1+(U_{i_1}+\cdots+U_{i_k})T\right) = \sum_{j\geq 0} Q_{k,j}^{(r)}\left(s_1^{(r)}(\underline{U}),\dots,s_{kj}^{(r)}(\underline{U})\right)T^j$$

Si $f = 1+\xi_1T+\xi_2T^2+\cdots \in \Lambda^0(A)$. on définit

$$\lambda(r,f) = 1+\sum_{k\geq 1}\left(\binom{r}{k}, \sum_{j\geq 0} Q_{k,j}^{(r)}(\xi_1,\dots,\xi_{kj})T^j\right)X^k.$$

λ définit une structure de pré-λ-anneau sur $\mathbb{Z}\times\Lambda^0(A)$.

<u>Définition</u> Soit K un pré-λ-anneau. On dit que K est spécial si l'application $\lambda : K \to \Lambda(K)$ est un morphisme de pré-λ-anneaux.
Si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall\, a, b \in K$ et $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\lambda_k(ab) = P_k(\lambda_1(a), \dots, \lambda_k(a), \lambda_1(b), \dots, \lambda_k(b))$$

(ii) $\forall\, a \in K$ et $k \in \mathbb{N}$, on a
$$\lambda(\lambda_k(a)) = \sum_{j \geq 0} P_{k,j}(\lambda_1(a), \dots, \lambda_{kj}(a))\, T^j$$

<u>Exemple</u> ① $\mathbb{Z}$ est un pré-λ-anneau spécial

② Si K est un pré-λ-anneau spécial et si I est un idéal tel que $\lambda(I) \subset 1 + T\,I[[T]]$, alors K/I est spécial

③ Si K est spécial, il en est de même de $K[X]$.

§3 Structure positive.

Soit K un pré-λ-anneau. On appelle augmentation tout morphisme surjectif de pré-λ-anneaux $\varepsilon : K \to \mathbb{Z}$.

Fixons une augmentation ε. On appelle structure positive tout sous-ensemble K_+ de K, stable par l'addition et la multiplication, et qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $1 \in K_+$
(2) $K = \{x - y \mid x, y \in K_+\}$
(3) $\forall\, a \in K_+$, $\varepsilon(a) > 0$.
(4) $\forall\, a \in K_+$, avec $r = \varepsilon(a)$ on a $\lambda_k(a) = 0$ $\forall\, k > r$, et $\det(a) := \lambda_r(a)$ est un élément inversible dont l'inverse est dans K_+.

<u>Exemple</u> Soit X un schéma noethérien connexe. $K = K^\circ(X)$.
pour tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini E, on pose $\varepsilon([E]) = \mathrm{rg}(E)$ alors ε s'étend en un homomorphisme d'anneau de $K^\circ(X)$ vers $\mathbb{Z}$, qui est en fait une augmentation.

En outre $K^0(X)_+ := \left\{ [E] \,\middle|\, \begin{array}{l} E \text{ est un } \mathcal{O}_X\text{-module localement} \\ \text{libre de rang fini} \end{array} \right\}$

est une structure positives.

On a $\det [E] = [\Lambda^{\mathrm{rg} E} E]$. Comme $\Lambda^{\mathrm{rg} E} E$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible, la condition (4) est bien vérifiée.

<u>Remarque</u> Soit K un pré-λ-anneau <u>spécial</u> muni d'une augmentation ε. Soit L l'ensemble des $l \in K^\times$ tels que $\varepsilon(l) = 1$ et $\lambda(l) = 1 + lT$. alors L est stable par multiplication.

Si $a, b \in L$, alors $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = 1$

$$\lambda(ab) \underset{\substack{\uparrow \\ K \text{ est spécial}}}{=} \lambda(a) \circ \lambda(b) = (1+aT) \circ (1+bT) = 1 + abT.$$

Si $l \in L$, alors $1 = \lambda(1) = \lambda(l) \circ \lambda(l^{-1}) = (1+lT) \circ (1 + l^{-1}T)$

donc $\lambda(l^{-1}) = 1 + l^{-1}T$ car $1 + lT$ est un non-diviseur de zéro.

$\rightsquigarrow l^{-1} \in L$. Donc L est un sous-groupe de $K^\times$.

Supposons donné $M \subset K$, stable par l'addition et la multiplication, et qui vérifie les conditions (1) — (3) et

(4'). pour tout élément $a \in M$, $\underbrace{\text{on a}}_{\text{et tout entier } k > \varepsilon(a)}$ $\lambda_k(a) = 0$, et $\lambda_{\varepsilon(a)}(a) \in L$

Il s'avère que le sous-semi-groupe K_+ de K engendré par $ML = \{ al \mid a \in M, l \in L \}$ définit une structure positive sur K.

- Par construction, K_+ est stable par l'addition et la multiplication
- pour tout $x \in K_+$ on a $\varepsilon(x) \geq 0$.
- Comme $K_+ \supset M$, tout élément de K s'écrit comme la différence de deux éléments de K_+
- Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de M, $r_i = \varepsilon(a_i)$ et $l_1, \ldots, l_n$ sont des éléments de L alors

$$r := \varepsilon(a_1 l_1 + \cdots + a_n l_n) = r_1 + \cdots + r_n.$$

$\lambda_k(a_1 l_1 + \cdots + a_n l_n) = 0$ pour $k > r$ et

$\lambda_r(a_1 l_1 + \cdots + a_n l_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{r_i}(a_i)\, l_i^{r_i} \in L.$

On dit que la structure positive K_+ est engendrée par M.

Soit K un pré-λ-anneau muni d'une structure positive K_+. On désigne par K_1 le sous-ensemble de K_+ des éléments l tels que $\varepsilon(l)=1$. K_1 est un sous-groupe de $K^\times$.

(Si $l \in K_1$, $\lambda(l) = 1 + lT$ et $l^{-1} \in K_+$. En outre, $\varepsilon(l^{-1}) = \varepsilon(l)^{-1} = 1 \Rightarrow l^{-1} \in K_1$)

Pour tout $a \in K_+$, on a $\det(a) \in K_1$ car $\varepsilon(\det(a)) = \varepsilon(\lambda_r(a))$
$= \lambda_r(\varepsilon(a)) = \lambda_r(r) = 1$.
(où $r = \varepsilon(a)$)

En outre $\det : (K_+, +) \longrightarrow (K_1, \times)$ est un morphisme de semi-groupes.

$$\det(a+b) = \det(a)\det(b).$$

$\rightsquigarrow$ $\det$ s'étend en un morphisme de groupes $(K, +) \longrightarrow (K_1, \times)$.

<u>Définition</u> On dit que $a \in K_+$ est scindable s'il peut s'écrire comme une somme d'éléments dans K_1. Si $a = l_1 + \cdots + l_r$ est une telle décomposition, on a $\lambda(a) = \prod_{i=1}^{r} (1 + l_i T)$

$\rightsquigarrow$ $\forall\, i \in \{0, \ldots, r\}$, $\lambda_i(a) = s_i^{(r)}(l_1, \ldots, l_r)$.

En outre $\varepsilon(\lambda(a)) = (1+T)^{\varepsilon(a)}$ (où on a étendu ε en un homomorphisme de $K[[T]]$ vers $\mathbb{Z}[[T]]$.

Soient a et b deux éléments scindables dans K_+, avec $a = l_1 + \cdots + l_n$, $b = \xi_1 + \cdots + \xi_m$. alors $\lambda(ab)(T) = \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (1 + l_i \xi_j T)$

$\rightsquigarrow$ $\lambda_k(ab) = P_k(\lambda_1(a), \ldots, \lambda_k(a), \lambda_1(b), \ldots, \lambda_k(b))$

et $\lambda_k(ab) = 0$ lorsque $k > mn$.

Si $a = l_1 + \cdots + l_r$ est scindable, pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$\lambda_k(a) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} l_{i_1} \cdots l_{i_k}$$

donc $\lambda(\lambda_k(a)) = \prod_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} (1 + l_{i_1} \cdots l_{i_k} T)$

$\rightsquigarrow$ $\forall j$, $\lambda_j(\lambda_k(a)) = P_{k,j}(\lambda_1(a), \ldots, \lambda_{kj}(a))$

Définition On dit qu'un pré-λ-anneau K (muni d'une structure positive) vérifie la propriété de scindement si, pour toute famille finie $(a_i)_{i=1}^n$ d'éléments de K_+, il existe une extension K' de K telle que les a_i sont tous scindables dans K'
(on convient que K' admet aussi une structure positive K'_+ qui contient K_+).

Exemple Soit X un schéma noethérien régulier et connexe.
Soit E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini.
L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est noethérien, régulier et connexe.
On désigne par $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ la projection.
On a
$$\pi^K : K(X) \longrightarrow K(\mathbb{P}(E))$$
$$[\mathcal{F}] \longmapsto [\pi^*\mathcal{F}]$$

$$\pi_K : K^0(\mathbb{P}(E)) = K(\mathbb{P}(E)) \longrightarrow K(X) = K^0(X)$$
$$[F] \longmapsto \sum_i [R^i\pi_* F](-1)^i$$

D'après la formule de projection, on a $\underset{\substack{\shortparallel \\ [F]}}{\pi_K \pi^K([F])}$ pour tout (démontrée plus tard)
$\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini F $\leadsto$ $\pi_K \pi^K = id$
$\Rightarrow$ π^K est une application injective.
De plus π^K est un morphisme de λ-anneaux.
On a $\pi^K[E] = [\mathcal{O}_E(1)] + [I_E]$
où I_E est le noyau de $\pi^* E \to \mathcal{O}_E(1)$ (c'est aussi un faisceau localement libre de rang fini.
Par récurrence on peut montrer que:

Proposition $K(X)$ satisfait à la propriété de scindement.

(Remarque: augmentation: $\varepsilon([E]) = rk(E)$
structure positive $K(X)_+ = \{[E] \mid E$ localement libre de rang fini$\}$
$K(X)_1 = \{[L] \mid L$ $\mathcal{O}_X$-module inversible$\}$.