Le premier but de cette séance est de montrer le théorème suivant :

<u>Théorème</u> Soit K un λ-anneau muni d'une structure positive K_+. Il vérifie la condition de scindement si et seulement s'il est spécial.

<u>Remarque</u> ① "$\Rightarrow$" est facile (on a vu ça dans la séance 7).

② Quitte à augmenter K_+, on peut supposer que K_+ contient (et donc égal à) l'ensemble de tous les éléments $l \in K^\times$ tels que $\varepsilon(l)=1$ et $\lambda(l) = 1 + lT$.

On fixe $u \in K_+$ et on suppose $r := \varepsilon(u) > 1$.

On construit un nouveau anneau $K_u := K[X]/(P_u)$

où $P_u(X) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u) X^{r-i} = X^r \lambda(u)(-X^{-1})$

On désigne par θ l'image de X dans K_u. Il s'avère que K_u est une K-algèbre engendrée par θ.

Proposition $K[X]$ est un λ-anneau spécial.

On a $\lambda(u-X) = (1 + \lambda_1(u)T + \dots + \lambda_r(u)T^r)(1+XT)^{-1}$

En particulier, pour $k \geq r$, on a $\lambda_k(u-X) = (-1)^k X^{k-r} P_u(X)$

et donc $\lambda_r(u-X) = (-1)^r P_u(X)$.

Montrons que, pour tout $j \geq 1$, $\lambda_j(\lambda_r(u-X))$ est dans l'idéal engendré par P_u. On a $\lambda_j(\lambda_r(u-X)) = P_{r,j}(\lambda_1(u-X), \dots, \lambda_{rj}(u-X))$

Or $P_{r,j}(X_1, \dots, X_{r-1}, 0, \dots, 0) = 0$

(On peut considérer par exemple $\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r-1} \leq r} (1 + u_{i_1} \cdots u_{i_r} T) = 1$

$\rightarrow P_{r,j}(s_1^{(r)}(\underline{u}), \dots, s_{r-1}^{(r)}(\underline{u}), 0 \dots 0) = 0$)

donc chaque monôme de $P_{r,j}$ contient un facteur de la forme X_i avec $i \geq r$. Le résultat est ainsi démontré.

<u>Corollaire</u> K_u est un λ-anneau spécial (passage au quotient).

Structure positive sur K_u :

On peut étendre ε en un morphisme d'anneaux $\overbrace{}^{k[T]\to\mathbb{Z}}$ en prenant $\varepsilon(T)=1$

On a $\varepsilon(P_u) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} = 0$ (c'est en fait une augmentation)

donc ε induit une augmentation de K_u. On a $\varepsilon(\theta)=1$.

En outre, on a $\lambda(\theta)=1+\theta T$. Donc

$$\theta \in L_u := \{ x \in K_u^\times \mid \varepsilon(x)=1,\ \lambda(x)=1+xT \}$$

On désigne par M_u le sous-semi-groupe de K_u engendré par les éléments de la forme $a\theta^i(u-\theta)^j$ (où $i,j\in\mathbb{N}$, $a\in K_+$).

M_u est stable par l'addition et la multiplication.

$\forall x \in M_u$, on a $\varepsilon(x)>0$.

Si F est un polynôme dans $K[X]$, il existe deux polynômes F_1 et F_2 à coefficients dans K_+ tels que $F=F_1-F_2$ $\rightsquigarrow$ $F(\theta)=F_1(\theta)-F_2(\theta)$

$\rightsquigarrow$ tout élément de K_u s'écrit comme la différence de deux éléments de M_u.

Soit K_{u+} la structure positive engendrée par M_u.

(Pour vérifier que cela marche, il faut montrer que $\lambda_k(u-\theta)=0$ pour $k\geq r$ et $\lambda_{r-1}(u-\theta)$ est un élément dans L_u).

On a déjà vu le premier point, et $\lambda_{r-1}(u-\theta)=\lambda_r(u)\theta^{-1}$ qui est dans L_u.

<u>Corollaire</u> Soit K un pré-λ-anneau spécial muni d'une augmentation et d'une structure positive, alors il vérifie la propriété de scindement.

<u>Preuve</u> Par récurrence on peut montrer que tout élément positif de K est scindé dans une extension qui est encore spécial.

<u>Projection de K_u dans K</u> Soit K un pré-λ-anneau spécial muni d'une structure positive. Pour $x\in K$, on définit

$$\sigma(x)(T) := \lambda(x)(-T)^{-1}$$

Le coefficient de T^i dans la série $\sigma(x)$ est noté comme $\sigma_i(x)$.

Si u est un élément positif, $\varepsilon(u)>1$, on désigne par $\pi_u : K_u \to K$ l'application K-linéaire qui envoie θ^i en $\sigma_i(u)$ $(0\leq i<r)$.

Proposition Soit K un pré-λ-anneau spécial muni d'une structure positive. Soit u un élément positif de K, $\varepsilon(u) > 1$. Pour tout entier $i \geq 0$, on a $\pi_u(\theta^i) = \sigma_i(u)$. Pour tout entier $i \in \{1, \dots, r-1\}$ on a $\pi_u(\theta^{-i}) = 0$.

Démonstration On a
$$\left(\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u) T^i\right) \cdot \left(\sum_{i \geq 0} \sigma_i(u) T^i\right) = 1.$$
$\forall\, k \geq r$, on a
$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u)\, \sigma_{k-i}(u) = 0$$
Si on suppose que $\pi_u(\theta^j) = \sigma_j(u)$ pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$, alors on a
$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^i \lambda_i(u)\, \pi_u(\theta^{k-i}) + \sigma_k(u) = 0$$
Si on applique π_u à l'égalité $\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u) \theta^i = 0$, on obtient
$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u)\, \pi_u(\theta^i) = 0$$
puisque π_u est K-linéaire. $\rightsquigarrow \sigma_k(u) = \pi_u(\theta^k)$.

Montrons la deuxième assertion. Soit k un entier dans $\{1, \dots, r-1\}$.
la relation $\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u)\, \theta^{r-i} = 0 \implies \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u)\, \pi_u(\theta^{r-i-k}) = 0$

en particulier $(-1)^r \lambda_r(u)\, \pi_u(\theta^{-1}) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \lambda_i(u)\, \sigma_{r-i-1}(u) = 0$.

Comme $\lambda_r(u)$ est inversible, on obtient $\pi_u(\theta^{-1}) = 0$.

Si on suppose $\pi_u(\theta^{-j}) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, k-1\}$, alors
$$(-1)^r \lambda_r(u)\, \pi_u(\theta^{-k}) = \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \lambda_i(u)\, \sigma_{r-i-k}(u) = 0,$$
d'où $\pi_u(\theta^{-k}) = 0$.

Involution Soit K un pré-λ-anneau spécial muni d'une structure positive K_+. On appelle involution de K tout morphisme d'anneaux $\iota : K \to K$, $a \mapsto a^\vee$ qui vérifie les relations suivantes

(1) $\forall\, a \in K$, $a^{\vee\vee} = a$

(2) $\forall\, a \in K$, $\varepsilon(a^\vee) = \varepsilon(a)$

(3) Si $l \in K_1$, alors $l l^\vee = 1$

(4) Tout élément de K_+ est scindable dans une extension de K où ι se prolonge en un morphisme d'anneau vérifiant (1) – (3).

Proposition Soit K un pré-λ-anneau spécial muni d'une structure positive K_+ et une involution. Si $u \in K_+$, $r = \varepsilon(u)$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$ on a $\lambda_i(u) = \lambda_{r-i}(u^\vee) \, \text{dét}(u)$

Démonstration Quitte à passer dans une extension on peut supposer que u est scindé comme la somme de r éléments $(l_i)_{i=1}^r$ dans K_+, on a

$$\lambda(u)(T) = \prod_{i=1}^r (1 + l_i T) = (l_1 \cdots l_r) T^r \prod_{i=1}^r (1 + l_i^\vee T^{-1}) = \lambda_r(u) T^r \lambda(u^\vee)(T^{-1})$$

d'où

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i(u) T^i = \lambda_r(u) \sum_{i=0}^r \lambda_{r-i}(u^\vee) T^i.$$

Exemple Si X est un schéma noethérien régulier et connexe, alors on a une involution $\iota : K(X) \to K(X)$ qui envoie $[E]$ en $[E^\vee]$.

Remarque Soit K un pré-λ-anneau spécial muni d'une structure positive et une application (endomorphisme d'anneaux) $\iota : K \to K$ qui vérifie les conditions (1) – (3) plus haut, alors ι est une involution si et seulement si l'assertion de la proposition est satisfaite

- Bien que $\iota : K \to K$ est un isomorphisme d'anneaux, il n'est pas un isomorphisme de pré-λ-anneaux.
- Si on munit l'anneau K de la nouvelle λ-structure $\lambda^\vee$ définie comme $\lambda_k^\vee(u) := \lambda_k(u^\vee)^\vee$,
  alors $\iota : (K, \lambda) \to (K, \lambda^\vee)$ est un isomorphisme de pré-λ-anneaux.

Si $u \in K_+$ tel que $r = \varepsilon(u) > 1$ on peut étendre ι en une involution du pré-λ-anneau K_u telle que $\iota(\theta) = \theta^{-1}$.

On construit $K[T] \to K_u$ qui prolonge ι et qui envoie T en θ^{-1}.

On identifie ensuite (K, λ) à $(K, \lambda^\vee)$ (via ι) et donc $K_u \cong K[T]/(Q_u)$ où $Q_u(T) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \lambda_i(u^\vee)^\vee T^{r-i}$

Comme $\sum_{i=0}^r (-1)^i \lambda_i(u^\vee) \theta^{i-r} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \lambda_{r-i}(u) \lambda_r(u)^{-1} \theta^{i-r} = \lambda_r(u)^{-1} \theta^{-r} \underbrace{P_u(\theta)}_{=0}$,

on obtient que $\iota(Q_u) = 0$ et donc induit une involution de K_u.

<u>Définition</u> On appelle λ-anneau tout pré-λ-anneau spécial K muni d'une augmentation ε, une structure positive K_+ et une involution ι.
Si K et K' sont deux λ-anneaux, on appelle morphisme de K vers K' tout homomorphisme de pré-λ-anneaux $f : K \to K'$ qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $\varepsilon(f(x)) = \varepsilon(x)$ quel que soit $x \in K$

(2) $f(K_+) \subset K'_+$

(3) pour tout $x \in K$, $f(x^\vee) = f(x)^\vee$.

<u>§3 Filtration γ de Grothendieck.</u>

Soit K un λ-anneau. On définit des applications

$$\gamma_i : K \longrightarrow K \qquad (i \geq 0)$$

via la relation $\gamma(a)(T) := \lambda(a)\left(\frac{T}{1-T}\right) = \sum_{i\geq 0} \gamma_i(a) T^i$

Par définition, on a $\gamma(a)(T) \in 1 + aT + T^2 K[\![T]\!]$

($T/(1-T) = T + T^2 + \cdots$ dans $\mathbb{Z}[\![T]\!]$).

Cette construction confie à K une autre structure de pré-λ-anneau puisque $K[\![T]\!] \longrightarrow K[\![T]\!]$ est un isomorphisme de K-algèbres

$$F \longmapsto F\left(\frac{T}{1-T}\right)$$

qui envoie $1 + TK[\![T]\!]$ dans lui-même. En particulier,

$$\gamma_k(a+b) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(a)\gamma_j(b) \qquad (*)$$

<u>Observation</u>.

Si $l \in K_1$, alors $\gamma(l-1)(T) = \dfrac{1 + lT/(1-T)}{1 + T/(1-T)} = 1 + (l-1)T$

Plus généralement, si $l_1, \dots, l_r$ sont des éléments dans K et si $x_i = l_i - 1$ $(i \in \{1, \dots, r\})$, alors $\forall k \geq 1$, on a

$$\gamma_k(x_1 + \cdots + x_r) = s_k(x_1, \dots, x_r)$$

où s_k est le $k^{\text{ième}}$ polynôme symétrique fondamental.

On utilise la formule $(*)$ à démontrer ce résultat.

Proposition Soient u un élément positif de K et $r = \varepsilon(u)$. On a

(1) $$\sum_{i=0}^{r} \gamma_i(u-r)\, T^{r-i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i(u)\,(T-1)^{r-i}$$

(2) $$\gamma_r(u-r) = \lambda(u^\vee)(-1) \cdot \lambda_r(u).$$

Démonstration On a

$$\gamma(u-r)(T) = \lambda(u-r)\left(\frac{T}{1-T}\right) = (1-T)^r \lambda(u)\left(\frac{T}{1-T}\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i(u)\, T^i (1-T)^{r-i}$$

$$\rightsquigarrow \quad \sum_{i=0}^{r} \gamma_i(u-r)\, T^{r-i} = T^r \gamma(u-r)(T^{-1}) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i(u)\,(T-1)^{r-i}$$

on obtient (1).

Si on compare les termes constants dans les deux côtés de (1). on obtient

$$\gamma_r(u-r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \lambda_i(u) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \lambda_{r-i}(u^\vee)\, \lambda_r(u)$$

$$\rightsquigarrow \quad \gamma_r(u-r) = \lambda_r(u) \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u^\vee) = \lambda(u^\vee)(-1) \cdot \lambda_r(u).$$

Définition Soit K un λ-anneau. On appelle filtration γ sur K la $\mathbb{N}$-filtration F sur K (décroissante) telle que

$$F^0(K) = K. \qquad F^1(K) = Ker(\varepsilon)$$

et pour tout $n > 1$. $F^n(K)$ est le sous-groupe de $(K,+)$ engendré par les éléments de la forme

$$\gamma_{r_1}(x_1) \cdots \gamma_{r_k}(x_k)$$

où $r_1, \dots, r_k$ sont des entiers ≥ 0 tels que $r_1 + \cdots + r_k \geq n$, et $x_1, \dots, x_k$ sont des éléments dans $F^1(K)$.

. La filtration F est compatible à la structure d'anneau de K:

$$\forall n, m \qquad F^m(K)\, F^n(K) \subset F^{n+m}(K).$$

On désigne par $Gr^\cdot(K)$ l'anneau gradué associé :

$$Gr^n(K) := F^n(K) / F^{n+1}(K).$$

Rappel Si u est un élément positif de K avec $\varepsilon(u) > 1$.

$$K_u := K[X] / (P_u)$$

où $$P_u(X) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u)\, X^{r-i}.$$

<u>Proposition</u> Pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$F^n(K_u) = \sum_{i=0}^{r-1} F^{n-i}(K)(\theta-1)^i$$

où par convention $F^k(K) = K$ si $k \leq 0$. En particulier, on a

$F^k(K_u) \cap K = F^k(K)$ pour tout k

<u>Démonstration</u> Pour tout entier $n \geq 0$, on note

$$G^n(K_u) = \sum_{i \geq 0} F^{n-i}(K)\,(\theta-1)^i.$$

G est une filtration sur K_u qui est compatible à la structure d'anneau.
Tout élément $y \in K_u$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$y = \sum_{0 \leq i \leq r-1} a_i\,(\theta-1)^i.$$

En outre, $\varepsilon(y) = 0$ si et seulement si $\varepsilon(a_0) = 0$. En particulier, on a

$$F^1(K_u) = F^1(K) + K(\theta-1) + \cdots + K(\theta-1)^{r-1} = G^1(K_u).$$

Montrons $G^n(K_u) = F^n(K_u)$ pour $n > 1$. Comme $\theta - 1 = \gamma_1(\theta-1)$, on obtient $G^n(K_u) \subset F^n(K_u)$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de vérifier que, pour tout entier $k \geq 0$, tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$ et tout $a \in K$, on a $\gamma_k(a(\theta-1)^i) \in G^k(K_u)$.

(~~Comme (K_u, γ) est un λ-anneau, on obtient~~

$$\cancel{\gamma_k(xy) = P_k(\gamma_1(x), \dots, \gamma_k(x), \gamma_1(y), \dots, \gamma_k(y))}$$)

On peut démontrer ce résultat par récurrence sur i.

On a $\displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \gamma_i(u-r)\, T^{r-i} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \lambda_i(u)\,(T+1)^{r-i}$

(d'après la proposition précédente)

On en déduit

$$P_u(T+1) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \gamma_i(u-r)\, T^{r-i}$$

En particulier, on a $\displaystyle(\theta-1)^r = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i-1} \gamma_i(u-r)\,(\theta-1)^{r-i}$
(en prenant $T = \theta - 1$)

$$\in F^r(K) + F^{r-1}(K)(\theta-1) + \cdots + F^1(K)(\theta-1)^{r-1}.$$

Par récurrence, on peut montrer que, $\forall\, j \geq r$

$$(\theta-1)^j \in F^j(K) + F^{j-1}(K)(\theta-1) + \cdots + F^{j-r+1}(K)(\theta-1)^{r-1} \rightsquigarrow G^n(K_u) = \sum_{i=0}^{r-1} F^{n-i}(K)(\theta-1)^i$$

Remarque $\forall\, u \in K_+$, il existe une extension de λ-anneaux K'/K telle que u soit scindée dans K' et que $F^n(K') \cap K = F^n(K)$ pour tout n. En outre, quitte à passer à une extension, tout élément de $F^n(K)$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$\pm (l_1 - 1)^{a_1} \cdots (l_r - 1)^{a_r}$$

où $l_1, \dots, l_r$ sont des éléments dans K_1, et $a_1, \dots, a_r$ sont des entiers strictement positifs tels que $a_1 + \cdots + a_r \geq n$.

Proposition Soit K un λ-anneau. L'application de K_1 vers $Gr^1(K) := F^1(K)/F^2(K)$ qui envoie l en la classe de $l-1$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration Si $l_1, l_2 \in K_1$, on a $l_1 l_2 - 1 = (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + (l_1 - 1)(l_2 - 1)$

$\rightarrow$ $f : K_1 \longrightarrow Gr^1(K)$ est un isomorphisme de groupes.
$l \longmapsto [l-1]$

Montrons la restriction de dét $: K \longrightarrow K_1$ à $F^2(K)$ est trivial.

Si $l_0, l_1, l_2 \in K_1$, on a

$$\text{dét}\big((l_1 - 1)(l_2 - 1)\big) = \text{dét}(l_1 l_2 - l_1 - l_2 + 1) = 1$$

Le cas général se découle par une extension de K. Donc dét induit un homomorphisme $K/F^2(K) \longrightarrow K_1$ que l'on note encore dét.

Si $l \in K_1$, on a $\text{dét}(f(l)) = \text{dét}(l-1) = l$.

Soit $x \in F^1(K)$. on veut vérifier $f(\text{dét}(x)) \equiv x \mod F^2(K)$. Il suffit de traiter le cas où $x = \sum_{i=1}^{n} (l_i - 1)$ avec $l_i \in K_1$.

On a $\text{dét}(x) = l_1 \cdots l_n$. Montrons que $l_1 \cdots l_n - 1 \equiv x \mod F^2(K)$.

C'est vrai lorsque $n=1$. Supposons que l'assertion est vraie pour $n-1$.

Dans le cas n, on a

$$l_1 \cdots l_n - 1 \equiv l_1 (l_2 + \cdots + l_n - n + 2) - 1 = l_1 (l_2 + \cdots + l_n - n + 1) + l_1 - 1 \mod F^2(K)$$

Comme $l_2 + \cdots + l_n - n + 1 \in F^1(K)$, on a

$$l_1 (l_2 + \cdots + l_n - n + 1) \equiv l_2 + \cdots + l_n - n + 1 \mod F^2(K)$$

Le résultat est donc démontré.