Soient K un λ-anneau et
$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$
un anneau gradué. On appelle morphisme de Chern à valeur dans A tout morphisme de groupes $c : (K, +) \longrightarrow \Lambda^0(A) = \{1 + \xi_1 T + \xi_2 T^2 + \cdots \mid \xi_i \in A_i\}$
$$c(u)(T) = 1 + c_1(u)\,T + c_2(u)\,T^2 + \cdots$$
qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $\forall\, l \in K_1$, on a $c_i(l) = 0$ pour tout $i > 1$

(2) $c_1 : K_1 \longrightarrow (A_1, +)$ est un morphisme de groupes.

$c_i(u)$ est appelé la $i^{\text{ème}}$ classe de Chern de u.

Soit $\hat{A} = \prod_{n \geq 0} A_n$ le complété de A. L'élément $c(u) \in \Lambda^0(A)$ est complètement déterminé par $c(u)(1) = 1 + c_1(u) + c_2(u) + \cdots$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $c(u)$ cet élément dans $\hat{A}$, appelé la classe de Chern totale.

On dit que c vérifie la propriété de scindement si, pour toute famille finie $(u_i)_{i=1}^{n}$ d'élément dans K_+, il existe une extension K' de K telle que tout u_i est scindable dans K' et que l'application c s'étende en un morphisme de K' vers $\Lambda^0(A')$ pour un certaine extension A' de l'anneau gradué A.

Si $u \in K_+$ s'écrit comme $u = l_1 + \cdots + l_r$ avec $l_i \in K_1$, alors
$$c(u) = \prod_{i=1}^{r} (1 + c_1(l_i)).$$
$\longrightarrow \forall\, k \in \{1, \ldots, r\}$, on a $c_k(u) = s_k(c_1(l_1), \ldots, c_1(l_r))$.

On note $c_{top}(u) := c_r(u)$. On a $c_{top}(u) = c_1(l_1) \cdots c_1(l_r)$.

Pour $k \geq 1$, on a
$$c(\lambda_k(u))(T) = \prod_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} \left(1 + (c_1(l_{i_1}) + \cdots + c_1(l_{i_k}))\,T\right).$$
Si v est un autre élément dans K_+, $v = m_1 + \cdots + m_s$ avec $m_j \in K_1$, on a
$$c(uv)(T) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} \left(1 + (c_1(l_i) + c_1(m_j))\,T\right).$$

En particulier, si $l \in K_1$, alors

$$c(ul)(T) = \sum_{i=0}^{r} c(l)(T)^{r-i} c_i(u) T^i$$

ou encore

$$c_k(ul) = \sum_{j=1}^{k} \binom{r-j}{k-j} c_j(u) c_1(l)^{k-j}$$

Soient K un λ-anneau, A un anneau gradué et $c : K \to \Lambda^\circ(A)$ un morphisme de Chern qui vérifie la propriété de scindement.
Soit u un élément positif de K avec $r = \varepsilon(u) > 1$.
Soit $A_u := A[X] / (P_c)$ où $P_c(X) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i c_i(u) X^{r-i}$.
$A[X]$ est muni de la graduation de sorte que X soit homogène de degré 1 (ainsi P_c est une élément homogène dans $A[X]$).
Soit ξ l'image de X dans A_u.
On peut étendre c en un morphisme de groupes $K[X] \to \Lambda^\circ(A[X])$ de sorte que

$$c(aX^i)(T) = (1+XT)^{i\varepsilon(a)} c(a)\left(\frac{T}{(1+XT)^i}\right)$$

Ce morphisme de groupes induit en fait un morphisme de Chern de K_u dans $\Lambda^\circ(A_u)$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\forall\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\quad c_k(P_u) \in (P_c)$$

ou de façon équivalente, $c_k(\lambda_r(u-X)) \in (P_c)$.
Pour cela il faut construire une structure de pré-λ-anneau sur $\mathbb{Z} \times \Lambda^\circ(A)$ et montrer que $(\varepsilon, c) : A \to \mathbb{Z} \times \Lambda^\circ(A)$ est un morphisme de pré-λ-anneaux. (On laisse les détails comme un exercice)

<u>Caractère de Chern</u> Soient K un λ-anneau, $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ un anneau gradué et $c : K \to \Lambda^\circ(A)$ un morphisme de Chern qui satisfait à la propriété de scindement.

Soit $\varphi \in \mathbb{Z}[\![T]\!]$. Si $u \in K_+$ avec $r = \varepsilon(u)$, il existe des extensions K' de K et A' de A telles que
① c s'étend en un morphisme de Chern sur $K' \to \Lambda^\circ(A')$

② u est scindé comme $l_1 + \cdots + l_r$ avec $l_i \in K_1'$

On définit $ch_\varphi(u) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(c_1(l_i)) \in \hat{A}$

Cette définition ne dépend pas du choix de K' et le scindement.

Le coefficient de T^k de $\sum_{i=1}^{r} \varphi(X_i T) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_r][[T]]$

est un polynôme symétrique de degré k.

$\rightsquigarrow$ Il existe des polynômes $(H_{\varphi,j})_{j \geq 0}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi(X_i T) = \sum_{j \geq 0} H_{\varphi,j}(s_1^{(r)}(\underline{X}), \ldots, s_j^{(r)}(\underline{X}))\, T^j$$

Donc $ch_\varphi(u) = \sum_{j \geq 0} H_{\varphi,j}(c_1(u), \ldots, c_r(u))$

$H_{\varphi,j}$ est appelé le $j^{\text{ème}}$ polynôme de Hirzebruch de φ.

Par définition, $ch_\varphi(\cdot)$ est additif sur K_+, donc induit un morphisme de groupes de K vers $\hat{A}$.

Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée, par le même procédé, on peut associer à chaque $\varphi \in \mathbb{Q}[[T]]$ un morphisme $ch_\varphi : K \longrightarrow \hat{A}$ de façon similaire. En particulier on note ch pour $ch_{\exp}$, où

$$\exp(T) := \sum_{k \geq 0} \frac{T^k}{k!}$$

Le $j^{\text{ème}}$ polynôme de Hirzebruch de la série exp est noté comme H_j. On a

$$H_1(s_1) = s_1, \quad H_2(s_1, s_2) = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) \quad \text{etc.}$$

<u>Proposition</u> On suppose que A est une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée. Alors $ch : K \longrightarrow \hat{A}$ est un morphisme d'anneaux.

<u>Preuve</u> Comme ch est un morphisme de groupes, il suffit de montrer que, si u et u' sont dans K_+, alors $ch(uu') = ch(u)\,ch(u')$.

Quitte à passer à des extensions, on peut supposer $u = l_1 + \cdots + l_r$ et $u' = m_1 + \cdots + m_s$ où $l_i, m_j \in K_1$.

Proposition Soit u un élément positif de K. On a

① $$Td(u^\vee) = Td(u)\exp(-c_1(u))$$

② $$ch(\lambda(u^\vee)(-1)) = Td(u)^{-1} c_{top}(u).$$

Démonstration ① $Td : K \longrightarrow \hat{A}^\times$ est un morphisme de groupes. Il suffit de traiter le cas où $u = l \in K_1$. On a

$$Td(l^\vee) = \frac{-c_1(l)\exp(-c_1(l))}{\exp(-c_1(l))-1} = \frac{c_1(l)}{\exp(c_1(l))-1} = \exp(-c_1(l))\,Td(l).$$

② Quitte à passer à une extension, on peut supposer $u = l_1 + \dots + l_r$ avec l_i linéaire. On a

$$\lambda(u^\vee) = \prod_{i=1}^{r}(1+l_i^\vee T)$$

donc

$$ch(\lambda(u^\vee)(-1)) = \prod_{i=1}^{r} ch(1-l_i^\vee) = \prod_{i=1}^{r}(1-\exp(-c_1(l_i)))$$

$$Td(u) = \prod_{i=1}^{r}\frac{c_1(l_i)\exp(c_1(l_i))}{\exp(c_1(l_i))-1}$$

$$\rightsquigarrow ch(\lambda(u^\vee)(-1))\,Td(u) = \prod_{i=1}^{r} c_1(l_i) = c_{top}(u).$$ ✗

Classe de Chern via la filtration γ

Soit K un λ-anneau. Pour tout $u \in K_+$ et tout $i \geq 0$, on pose

$$c_i(u) = \gamma_i(u-\varepsilon(u)) \mod F^{i+1}(K)$$

Proposition L'application $c : K_+ \longrightarrow \Lambda^\circ(Gr(K))$ qui envoie $u \in K_+$ en

$$c(u) = 1 + c_1(u)T + c_2(u)T^2 + \cdots$$

est un morphisme de semi-groupes. Le morphisme de groupes induit $c : K \longrightarrow \Lambda^\circ(Gr(K))$ est un morphisme de Chern qui vérifie la propriété de scindement.

Preuve $\gamma : K \longrightarrow 1+TK[[T]]$ est un morphisme de groupes

$\rightsquigarrow$ c préserve les lois de composition.

Pour $l \in K_1$, on a $\gamma_i(l-1) = 0$ si $i > 1$.

et $c_1 : K_1 \longrightarrow Gr^1(K)$ est un morphisme de groupes.

$\rightsquigarrow$ c est un morphisme de Chern.

Si K' est une extension de K, alors $c : K' \longrightarrow \Lambda^\circ(Gr(K'))$ prolonge $c : K \longrightarrow \Lambda^\circ(Gr(K))$

On a
$$u u' = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} l_i m_j$$

Donc
$$ch(uu') = \sum_{i,j} \exp(c_1(l_i m_j)) = \sum_{i,j} \exp(c_1(l_i) + c_1(m_j))$$

$$= \sum_{i,j} \exp(c_1(l_i)) \exp(c_1(m_j)) = \left(\sum_i \exp(c_1(l_i))\right)\left(\sum_j \exp(c_1(m_j))\right)$$

$$= ch(u)\, ch(u').$$

*

Si $l \in K_1$, on a $c_1(l^\vee) = c_1(l^{-1}) = -c_1(l)$.

$\rightsquigarrow$ Si $u = l_1 + \cdots + l_r$ avec $l_i \in K_1$, alors

$$c_i(u^\vee) = s_i^{(r)}(-c_1(l_1), \ldots, -c_1(l_r)) = (-1)^i s_i^{(r)}(c_1(l_1), \ldots, c_1(l_r))$$
$$= (-1)^i c_i(u).$$

$\rightsquigarrow$ $c(u^\vee)(T) = c(u)(-T)$ (valable pour tout u).

<u>Classe de Todd</u>

Pour tout $\varphi \in 1 + T\mathbb{Z}[[T]]$ (ou $\varphi \in 1 + T\mathbb{Q}[[T]]$ si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre)

On définit $Td_\varphi : K \longrightarrow \hat{A}^\times$ tel que pour $u \in K_+$ qui est scindé dans une extension comme $l_1 + \cdots + l_r$, on a

$$Td_\varphi(u) = \prod_{i=1}^r \varphi(c_1(l_i))$$

Il existe des polynômes $(Q_{\varphi,j})_{j\ge 0}$ tels que
$$Td_\varphi(u) = \sum_{j\ge 0} Q_{\varphi,j}(c_1(u), \ldots, c_j(u))$$

Dans le cas particulier où $\varphi(T) = \dfrac{T\exp(T)}{\exp(T) - 1}$, le morphisme Td_φ est noté en abrégé comme Td et les polynômes $Q_{\varphi,j}$ sont notés comme Q_j. On a

$$Q_1(s_1) = \tfrac{1}{2} s_1, \qquad Q_2(s_1, s_2) = \tfrac{1}{2}(s_1^2 + s_2)$$
$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = \tfrac{1}{24} s_1 s_2.$$

<u>Rappel</u> $K_u := K[X]/(P_u)$ avec

$$P_u(X) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u) X^{r-i} \qquad (\varepsilon(u) = r,\ u \in K_+)$$

Soient $j_u : K \longrightarrow K_u$ l'application d'inclusion, θ l'image de X dans K_u

et $\pi_u : K_u \longrightarrow K$ $\quad \pi_u(\theta^i) = \sigma_i(u)$ $(0 \leq i < r)$ (K-linéaire)

où $\sigma(x)(T) = \lambda(x)(-T)^{-1}$.

D'après la relation $F^n(K_u) = \sum_{i=0}^{r-1} F^{n-i}(K)(\theta-1)^i$ $(*)$, on a

$$\pi_u(F^n(K_u)) \subset F^{n-r+1}(K).$$

En outre $j_u(F^n(K)) \subset F^n(K_u)$ et $K \cap F^n(K_u) = F^n(K)$.

Donc on a $Gr(j_u) : Gr^{\cdot}(K) \longrightarrow Gr^{\cdot}(K_u)$ homomorphisme injectif d'anneaux gradués.

$Gr(\pi_u) : Gr^{\cdot}(K_u) \longrightarrow Gr^{\cdot}(K)$

l'homomorphisme de groupes gradués (homogène de degré $1-r$).

Soit P_c le polynôme dans $Gr^{\cdot}(K)[X]$ défini comme

$$P_c(X) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i c_i(u) X^{r-i}.$$

On a

$$Gr^{\cdot}(K)_u = Gr^{\cdot}(K)[X]/(P_c) \qquad \xi = \text{l'image de } X$$

Soit $p_u : Gr^{\cdot}(K)_u \longrightarrow Gr^{\cdot}(K)$ la projection telle que

$$p_u(\xi^j) = 0 \text{ pour } j \in \{0, \dots, r-2\} \text{ et } p_u(\xi^{r-1}) = 1$$

Considérons l'homomorphisme d'anneaux gradués $Gr^{\cdot}(K)[X] \longrightarrow Gr^{\cdot}(K_u)$

qui envoie X en $c_1(\theta)$. On a montré que

$$\sum_{i=0}^{r} \gamma_i(u-r) T^{r-i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i(u)(T-1)^{r-i}$$

Donc

$$P_c(c_1(\theta)) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i c_i(u) c_1(\theta)^{r-i} = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \gamma_i(u-r) c_1(\theta)^{r-i} \pmod{F^{r+1}(K_u)}$$

$$= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u) (1+c_1(\theta))^{r-i}$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i(u) \theta^{r-i} = 0 \pmod{F^{r+1}(K_u)}$$

Donc $Gr^{\cdot}(K)[X] \longrightarrow Gr^{\cdot}(K_u)$ induit par passage au quotient

$\varphi_u : Gr^{\cdot}(K)_u \longrightarrow Gr^{\cdot}(K_u)$ $\quad$ D'après $(*)$, c'est un isomorphisme de

$\quad \xi \longmapsto c_1(\theta)$ $\quad$ $Gr^{\cdot}(K)$-algèbres graduées.

Proposition On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Gr^\cdot(K)_u \arrow[r, "\varphi_u"] \arrow[d, "p_u"'] & Gr^\cdot(K_u) \arrow[d, "Gr(\pi_u)"] \\ Gr^\cdot(K) \arrow[r, equal] & Gr^\cdot(K) \end{tikzcd}$$

Démonstration Les applications sont $Gr^\cdot(K)$-linéaires. Il suffit de vérifier

$$p_u(\xi^i) = Gr(\pi_u)(c_1(\theta)^i)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Le cas où $i \in \{1, \dots, r-2\}$ est trivial car $Gr(\pi_u)$ est homogène de degré $1-r$. Dans la suite, on calcule $Gr(\pi_u)(c_1(\theta)^{r-1})$. On a

$$Gr(\pi_u)(c_1(\theta)^{r-1}) = \varepsilon(\pi_u((\theta-1)^{r-1})) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1}\binom{r-1}{i}\varepsilon(\sigma_i(u))$$

En outre, $\varepsilon(\sigma(u)) = \varepsilon(\lambda(u)(-T))^{-1} = (1-T)^{-r}$

Donc
$$Gr(\pi_u)(c_1(\theta)^{r-1}) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1}\binom{r-1}{i}\binom{r+i-1}{r-1}$$

Or, dans $\mathbb{Z}[[T]]$, on a

$$\sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1}\binom{r-1}{i} T^{r-1-i} = (1-T)^{r-1}$$

$$\sum_{i\geq 0} \binom{r+i-1}{r-1} = (1-T)^{-r}$$

donc $Gr(\pi_u)(c_1(\theta)^{r-1})$ s'identifie au coefficient de T^{r-1} dans la série formelle $(1-T)^{-1} = (1-T)^{-r}(1-T)^{r-1}$, qui est égale à 1.

Soit X un schéma noethérien régulier et connexe.

Soit E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $r > 1$

Soit $P = \mathbb{P}(E)$ et $\pi : P \to X$ la projection canonique.

On a un homomorphisme surjectif $\pi^*(E) \to \mathcal{O}_E(1) \to 0$

qui induit une résolution de $\mathcal{O}_P$

$$0 \to \pi^*(\Lambda^r E)(-r) \to \pi^*(\Lambda^{r-1} E)(-r+1) \to \dots \to \pi^*(E)(-1) \to \mathcal{O}_P \to 0$$

(complexe de Koszul)

Donc $$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i([\pi^* E])\, [\mathcal{O}_E(1)]^{-i} = 0$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \lambda_i([\pi^* E])\, [\mathcal{O}_E(1)]^{r-i} = 0$$

Soit $u = [E] \in K(X)$. On a un homomorphisme canonique de $K(X)_u$ vers $K(P)$ tel que θ soit envoyé vers $[\mathcal{O}_E(1)]$.

$K(P)$ est engendré par les faisceaux réguliers. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_P$-module quasi-cohérent de type fini.

On dit que $\mathcal{F}$ est régulier au sens de Castelnuovo et Mumford si :

$$R^i\pi_*(\mathcal{F}(-i)) = 0 \quad \text{pour } i > 0.$$

On utilisera la formule de projection suivant :

Si G est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, alors on a

$$R^i\pi_*(\mathcal{F} \otimes \pi^* G) \simeq R^i\pi_*(\mathcal{F}) \otimes G \qquad \text{pour tout entier } i \geq 0$$

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, alors on a

$$R^i\pi_*(\mathcal{O}(n) \otimes \pi^*\mathcal{M}) = 0 \qquad \text{pour } 0 < i < r-1$$

et pour $i = r-1$ $n \geq -r+1$.

$\longrightarrow$ $\mathcal{O}(n) \otimes \pi^*\mathcal{M}$ est régulier pour $n \geq 0$.

En outre, si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte courte telle que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ soient régulier, alors $\mathcal{F}$ l'est aussi.

Proposition Le groupe $K(P)$ est engendré par les éléments de la forme $[F]$, où F parcourt l'ensemble $\mathcal{R}$ des $\mathcal{O}_P$-modules localement libres de rang fini qui sont régulier au sens de Castelnuovo-Mumford.

Démonstration Pour tout entier $n \geq 0$, soit

$$\mathcal{R}_n = \{ F \text{ localement libre de rang fini} \mid R^i\pi_*(F(j)) = 0 \quad \forall i > 0,\ j \geq n-i \}$$

On a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_1 \subset \cdots$ et $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{R}_n = \{ \mathcal{O}_P\text{-modules localement libres de rang fini} \}$

Tout élément F dans $\mathcal{R}_{n+1}$ admet une résolution par des éléments dans $\mathcal{R}_n$ (via la résolution duale de Koszul)

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \pi^*(E^\vee)(1) \to \pi^*(\wedge^2 E^\vee)(2) \to \cdots \to \pi^*(\wedge^r E^\vee)(r) \to 0$$

$$\rightsquigarrow 0 \to F \to \pi^*(E^\vee) \otimes F(1) \to \pi^*(\wedge^2 E^\vee) \otimes F(2) \to \cdots \to \pi^*(\wedge^r E^\vee) \otimes F(r) \to 0$$

$\rightsquigarrow$ $K(P)$ est engendré par $\{[F] \mid F \in \mathcal{R}_0\}$.

※

Proposition Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_P$-module quasi-cohérent de type fini qui est régulier au sens de Castelnuovo-Mumford.

(1) $\mathcal{F}(n)$ est régulier pour tout entier $n \geq 0$

(2) l'homomorphisme canonique

$$\pi^*\pi_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

est surjectif. De plus, si K est son noyau, alors $K(1)$ est régulier

(3) Si $\mathcal{F}$ est localement libre de rang fini, il en est de même de $\pi_*\mathcal{F}$.

cf. D. Quillen Higher algebraic K-theory I. §8

On construit une résolution particulière d'un $\mathcal{O}_P$-module F localement libre de rang fini, régulier au sens de Castelnuovo-Mumford

Soient $T_0(F) = \pi_*F$ et $Z_0 = \mathrm{Ker}(\pi^* T_0(F) \to F)$.

On a vu que $Z_0(1)$ est régulier (d'après (2))

On construit par récurrence $T_p(F) = \pi_*(Z_{p-1}(1))$

and $Z_p = \mathrm{Ker}(\pi^*\pi_*(Z_{p-1}(1)) \to Z_{p-1}(1))$.

On peut vérifier que $R^i\pi_*(Z_p(p-i)) = 0$ pour $i \geq 0$, $p \geq i$.

($Z_p(1)$ est régulier)

$$\rightsquigarrow 0 \to \pi^* T_{r-1}(\mathcal{F})(-r+1) \to \cdots \to \pi^* T_1(F)(-1) \to \pi^* T_0(F) \to F \to 0.$$

(Comme $R^i\pi_* = 0$ pour $i \geq r$. Z_{r-1} est régulier

en outre $\pi_*(Z_{r-1}) = 0$ donc $Z_{r-1} = 0$).

Conséquence : $K(X)_u \longrightarrow K(P)$ est surjectif

L'application inverse :

Soit $\mathcal{R}' = \{ F$ $\mathcal{O}_P$-module localement libre de rang fini
$R^i\pi_*(F(j)) = 0$ pour tout $i > 0$ et $j \geq 0 \}$.

$\mathcal{R}_n' = \{ F$ localement libre de rang fini
$R^i\pi_*(F(n+j)) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout $j \geq 0 \}$.

$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_0' \subset \mathcal{R}_1' \subset \cdots$ $\quad \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{R}_n' = \{ \mathcal{O}_P\text{-modules localement libre de rang fini} \}$

<u>Proposition</u> Chaque $F \in \mathcal{R}_{n+1}'$ a une résolution par les faisceaux dans $\mathcal{R}_n'$ $\rightsquigarrow$ $K(P)$ est engendré par $[F]$ $(F \in \mathcal{R}')$.

Considérons
$$K(P) \longrightarrow K(X)^r$$
$$[F] \longmapsto \left([\pi_* F], \ldots, [\pi_*(F(r-1))] \right)$$
où $F \in \mathcal{R}'$. (bien défini comme un morphisme de groupes)

On a
$$K(X)^r \cong K(X)_u \longrightarrow K(P) \longrightarrow K(X)^r$$
$$(a_0, \ldots, a_{r-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{r-1} a_i \ell^{-i} \longmapsto \sum_{i=0}^{r-1} a_i [\mathcal{O}(-i)]$$
$\mathcal{O}(-i) \in \mathcal{R}'$ pour $i \leq r-1$

Si G est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini on a
$$\pi_*(\pi^* G \otimes \mathcal{O}(-i) \otimes \mathcal{O}(j)) = \begin{cases} G & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

$\longrightarrow$ composé est une matrice triangulé dont le diagonal est $\underline{1}$

$\longrightarrow$ application composée est injectif. $\Rightarrow$ $K(X)_u \cong K(P)$.

<u>Proposition</u> L'application $\pi_K : K(P) \longrightarrow K(X)$ s'identifie à $\pi_u : K(X)_u \longrightarrow K(X)$ via l'isomorphisme $K(X)_u \cong K(P)$

这副第10次讲解