CHAPITRE II Fibrés adéliques locaux

- Généralisation de la géométrie des nombres à la géométrie d'un corps global
- Invariants géométriques en comparaison avec la géométrie algébrique des courbes.
- Mettre dans une considération équalitaire toutes les places du corps global.

Prérequis : Cours de P.-H. Chaudouard

§ 1 Théorie locale : espaces vectoriels normés

Soit k un corps

<u>Définition 2.1</u> On appelle valeur absolue sur k toute application $|\cdot| : k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

(1) $\forall\, a, b \in k$, $\quad |ab| = |a| \cdot |b|$, $\quad |a+b| \leqslant |a| + |b|$

(2) $\forall\, a \in k^\times = k \setminus \{0\}$, $\quad |a| > 0$.

Si $\forall\, a, b \in k$, $\quad |a+b| \leqslant \max(|a|, |b|)$, on dit que $|\cdot|$ est non-archimédienne, Sinon on dit que $|\cdot|$ est archimédienne.

$|\cdot|$ définit une métrique sur l'espace k $(d(x, y) := |x-y|)$. Si k est complet par rapport à cette métrique, on dit que $(k, |\cdot|)$ est complet. Si k est discret par rapport à la topologie de cette métrique, on dit que $|\cdot|$ est discrète

Si k n'est pas complet, on peut considérer le complété $\hat{k}$ de k (l'anneau des suites de Cauchy modulo l'idéal maximal des suites convergeant vers 0)

Fait : $|\cdot|$ s'étend de façon unique sur $\hat{k}$.

Remarque 2.2

(1) Si $|\cdot|$ est non-archimédienne, alors la boule unité fermée $\mathcal{O}_k = \{a \in k \mid |a| \leq 1\}$ est un anneau. Il est un anneau de valuation ($\forall a \in k^\times$, a ou a^{-1} appartient à $\mathcal{O}_k$). C'est un anneau local dont l'idéal maximal est la boule unité ouvert

$$\mathfrak{m}_k = \{a \in k \mid |a| < 1\}$$

Si $(k, |\cdot|)$ est discret, alors $\mathcal{O}_k$ est un anneau de valuation discrète (en particulier, c'est un anneau noethérien)

(2) Valeur absolue triviale :

$$|\cdot|_0 : k \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad |a|_0 = \begin{cases} 1, & a \neq 0 \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

C'est une valeur absolue discrète.

(3) Théorème d'Ostrowski : Si $|\cdot|$ est archimédienne et si $(k, |\cdot|)$ est complet, alors $k \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (algébriqu^t et topologiquement). En outre, il existe $\kappa \in]0.1]$ tel que $|\cdot| = |\cdot|_\infty^\kappa$, où $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Convention : Dans le cours, on suppose $|\cdot| = |\cdot|_\infty$ si $(k, |\cdot|)$ est archimédien et complet.

Définition 2.3 Soit $(k, |\cdot|)$ un corps muni d'une valeur absolue qui est complet. Si V est un espace vectoriel sur k, on appelle **norme** sur V toute application $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

(1) $\forall x \in V \setminus \{0\}, \quad \|x\| > 0$

(2) $\forall a \in k, \quad \forall x \in V, \quad \|ax\| = |a| \cdot \|x\|$

(3) inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in V, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

$(V, \|\cdot\|)$ est appelé un espace vectoriel normé

Si l'inégalité triangulaire forte

$$\forall x, y \in V, \quad \|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

est vérifiée, on dit que $\|\cdot\|$ est **ultramétrique**

Restriction Si W est un sous-espace vectoriel de V, alors la restriction de $\|\cdot\|$ à W est une norme sur W.

Notation Si $r \geq 0$,

$$B_r(V, \|\cdot\|) := \{x \in V \mid \|x\| \leq r\}$$

$$B_r^\circ(V, \|\cdot\|) := \{x \in V \mid \|x\| < r\}$$

Topologie $\|\cdot\|$ induit une métrique sur V :

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Quotient Si W est un sous-espace vectoriel fermée de V, alors $\forall u \in V/W, \ \|u\|_{V/W} = \inf_{x \in V, [x]=u} \|x\|$ est une norme sur V/W, appelé le quotient de $\|\cdot\|$.

Norme d'opérateur Si V et V' sont deux espaces vectoriels normés sur k et si $f : V \to V'$ est une application k-linéaire, on définit

$$\|f\| := \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

On dit que f est **bornée** si $\|f\| < +\infty$.

Proposition 2.4 Si $\|f\| < +\infty$, alors f est continue.

La réciproque est vraie lorsque $|\cdot|$ est non-triviale.

Preuve "$\Rightarrow$" Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V$ converge vers $x \in V$.

alors $\|f(x_n) - f(x)\| = \|f(x_n - x)\| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\|$.

Si $\|f\| < +\infty$, alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.

"$\Leftarrow$" On suppose f continue, alors $f^{-1}(B_1^\circ(V'))$ est ouvert. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_\varepsilon^\circ(V) \subset f^{-1}(B_1^\circ(V'))$$

Si $|\cdot|$ n'est pas triviale, il existe $a \in k$, $0 < |a| < 1$.

Pour tout $x \in V$, $x \neq 0$. $\exists\ n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\|a^n x\| < \varepsilon \leq \|a^{n-1} x\| = |a|^{n-1} \|x\|$$

Donc $\|f(a^n x)\| = |a|^n \cdot \|f(x)\| < 1$ et

$$\|f(x)\| < |a|^{-n} \leq (\varepsilon |a|)^{-1} \|x\|.$$

D'où $\|f\| \leq (\varepsilon |a|)^{-1}$

Proposition 2.5 Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et W un sous-espace vectoriel fermé de V. Alors la topologie sur V/W induite par la norme quotient s'identifie à la topologie quotient.

Preuve Topologie quotient = la plus fine topologie qui rend continue le quotient $\pi : V \longrightarrow V/W$.

Si on munit V/W de la norme quotient, alors $\|\pi\| \leq 1$

Donc π est continue (d'après la proposition 2.4)

Réciproquement, si U est un sous-ensemble de V/W tel que $\pi^{-1}(U)$ est ouvert, alors pour tout $u \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ et tout $x_0 \in V$ tel que $\pi(x_0) = u$ tel que $\{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset \pi^{-1}(U)$.

Donc $\{v \in V/W \mid \|v - u\| < \varepsilon\} \subset U$

Cela montre que U est ouvert pour la topologie définie par la norme quotient

#

Théorème 2.6 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose $r = rg_k(V) < +\infty$. Alors, pour toute base $(e_i)_{i=1}^r$ de V, l'isomorphisme

$$k^r \xrightarrow{f} V$$
$$(a_1, \dots, a_r) \longmapsto a_1e_1 + \dots + a_re_r$$

est un homéomorphisme, où on considère la topologie produit sur k^r

<u>Démonstration</u> Récurrence sur r

Les cas où $r=0$ ou 1 sont triviaux.

On suppose que les cas de rang $<r$ sont démontrés

Soit $W = k e_1 + \cdots + k e_{r-1}$. L'hypothèse de récurrence montre que $g : k^{r-1} \longrightarrow W$ est un homéomorphisme.

$$(a_1, \ldots, a_{r-1}) \longmapsto a_1 e_1 + \cdots + a_{r-1} e_{r-1}$$

Donc W est complet. Cela implique que W est fermé dans V

Soit $\bar{f} : k \longrightarrow V/W$. C'est aussi un homeomorphisme

$$a \longmapsto a[e_r]$$

L'application f est certainement continue. Pour montrer qu'elle est un homeomorphisme, il suffit de vérifier que, $\forall \delta > 0$, $f(\mathring{B}_\delta^r)$ est un voisinage de 0. où $\mathring{B}_\delta = \{a \in k \mid |a| < \delta\}$

g est un homeomorphisme $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0$, $g(\mathring{B}_\delta^{r-1}) \supset \mathring{B}_{\varepsilon_1}(W)$

Soit $\delta' = \min\left(\delta, \dfrac{\varepsilon_1}{2\|e_r\|}\right)$

$\bar{f}$ est un homeomorphisme $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_2 > 0$. $\bar{f}(\mathring{B}_{\delta'}) \supset \mathring{B}_{\varepsilon_2}(V/W)$

Si $x \in V$, $\|x\| < \underset{\frac{1}{2}\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}}$, alors $\|[x]\| < \varepsilon_2$.

Donc il existe $a_r \in \mathring{B}_{\delta'}$ tel que $[x] = a_r [e_r]$.

De plus $\|x - a_r e_r\| \leq \|x\| + |a_r| \cdot \|e_r\|$

$$< \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 + \delta' \|e_r\| \leq \varepsilon_1$$

Donc $\exists\, (a_1, \ldots, a_{r-1}) \in \mathring{B}_\delta^{r-1}$, $g(a_1, \ldots, a_{r-1}) = x - a_r e_r$

Conclusion : $f(\mathring{B}_\delta^r) \supset \mathring{B}_\varepsilon(V, \|\cdot\|)$

Corollaire 2.7 Soit V un espace vectoriel de rang fini sur k

(1) Toute norme sur V induit une topologie complète et tout sous-espace vectoriel de V est fermé.

(2) Toutes les normes sur V sont équivalentes

(3) Toutes applications linéaires entre les espaces vectoriels normés de rang fini sont bornées.

Définition 2.8 Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels normés sur k. On désigne par $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ l'espace des applications linéaires bornées de V_1 vers V_2. Alors $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2)}$ définie comme

$$\forall\ f \in \mathcal{L}(V_1, V_2), \quad \|f\|_{\mathcal{L}(V_1,V_2)} = \sup_{0 \neq x \in V_1} \frac{\|f(x)\|_{V_2}}{\|x\|_{V_1}}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

En particulier, si $V_2 = (k, |\cdot|)$, cette norme est notée comme $\|\cdot\|_{V_1}^{*}$, appelée la norme duale de $\|\cdot\|_{V_1}$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(V_1, k)$ est noté comme V_1^{*}

Remarque Si V_1 est de rang fini, alors $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ est égal à $\mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$ et V_1^* est égal à l'espace dual (algébrique) de V_1.

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur k.

$\forall\ \alpha \in V^*$ et $x \in V$ on a $|\alpha(x)| \leq \|\alpha\|^* \cdot \|x\|$.

$$\Rightarrow \quad \ell_x : \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & k \\ \alpha & \longmapsto & \alpha(x) \end{array} \quad \text{est bornée}$$

On obtient donc une application k-linéaire

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow V^{**} \\ x &\longmapsto l_x \end{aligned}$$

On définit $\quad \|x\|^{**} := \|l_x\|^{**} \leq \|x\|$.

Si $x \longmapsto l_x$ définit un isomorphisme isométrique ($\|x\| = \|x\|^{**}$ pour tout $x \in V$) on dit que $(V, \|\cdot\|)$ est réflexif.

<u>Proposition</u> 2.9 On suppose que $|\cdot|$ est archimédienne $\forall x \in V$, $\|x\| = \|x\|^{**}$. En particulier, $(V, \|\cdot\|)$ est réflexif dès que V est de rang fini.

<u>Preuve</u> Hahn-Banach

⚠ Faux en général si $|\cdot|$ est non-archimédienne, même si V est supposé de rang fini.

(une norme duale est toujours ultramétrique)

§2 Orthogonalité.

Dans ce paragraphe, tout espace vectoriel est supposé de type fini sur k, où k est un corps valué complet.

<u>Définition</u> 2.10 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur k. Soit $\alpha \in]0,1]$. On dit qu'une base $(e_i)_{i=1}^r$ de V est α-orthogonale si,

$$\forall (a_1, \dots, a_r) \in k^r, \quad \|a_1 e_1 + \dots + a_r e_r\| \geq \alpha \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |a_i| \, \|e_i\|$$

Si $(e_i)_{i=1}^r$ est 1-orthogonal, on dit qu'elle est orthogonale

orthonormée = orthogonale et $\forall i$, $\|e_i\| = 1$

Exercice On suppose $|\cdot|$ archimédienne et $\|\cdot\|$ préhilbertienne. Montrer que l'orthogonalité dans la définition 2.10 est équivalente à la définition classique ($\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$)

Théorème 2.11 (Gram-Schmidt ultramétrique)

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang $r \geq 1$.
On suppose que $\|\cdot\|$ est ultramétrique ($|\cdot|$ est donc non-archimédienne)
Soit $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$ un drapeau complet de V.
Pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe une base α-orthogonale $(e_i)_{i=1}^r$ de V telle que

$$\forall i, \quad \#(V_i \cap \{e_i\}_{i=1}^r) = i$$

(On dit que $\{e_i\}_{i=1}^r$ est compatible au drapeau)
Si de plus $|\cdot|$ est une valuation discrète, la même conclusion est vraie pour $\alpha = 1$.

Démonstration Récurrence sur r. Le cas où $r=1$ est trivial.
On suppose que le théorème est démontré pour les espaces vectoriels normés de rang $< r$. On applique l'hypothèse de récurrence à V_{r-1} et au drapeau $0 = V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{r-1}$ pour obtenir une base $\sqrt{\alpha}$-orthogonal $\underbrace{(e_i)_{i=1}^{r-1}}_{\text{de } V_{r-1}}$ qui est compatible au drapeau

Soit $x \in V \setminus V_{r-1}$. Comme V_{r-1} est fermé dans V, on a $\operatorname{dist}(x, V_{r-1}) > 0$. Il existe alors $y \in V_{r-1}$ tel que $\|x - y\| \leq \sqrt{\alpha}^{-1} \operatorname{dist}(x, V_{r-1})$ (*)

On prend $e_r = x - y$

Soit $z = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$. On a

$$\|z\| \geq |\lambda_r| \operatorname{dist}(e_r, V_{r-1}) = |\lambda_r| \operatorname{dist}(x, V_{r-1})$$
$$\geq \sqrt{\alpha} |\lambda_r| \cdot \|e_r\| \geq \alpha |\lambda_r| \cdot \|e_r\|$$

Si $\|\lambda_r e_r\| \geq \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$, alors

$$\|z\| \geq \sqrt{\alpha} \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\| \geq \alpha \max_{i \in \{1, \dots, r-1\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|.$$

Si $\|\lambda_r e_r\| < \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\|$. alors

$$\|z\| = \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{r-1} e_{r-1}\| \geq \sqrt{\alpha} \max_{i \in \{1, \dots, r-1\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$$
$$\geq \alpha \max_{i \in \{1, \dots, r-1\}} |\lambda_i| \cdot \|e_i\|.$$

<u>Le cas discret</u> : résulte du lemme suivant (on peut prendre $\alpha = 1$ dans (*))

<u>Lemme</u> L'image de l'application composée

$$V \setminus \{0\} \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_+^\times \longrightarrow \mathbb{R}_+^\times / |k^\times|$$

est un ensemble fini. En particulier, si $|\cdot|$ est une valuation discrète, alors l'image de $\|\cdot\|$ est discrète, si $|\cdot|$ est triviale, alors l'image de $\|\cdot\|$ est un ensemble fini.

<u>Preuve</u> Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille de vecteurs dans V. $(n \geq 2)$
Si $(a_i)_{i=1}^n \in k^n$ est telle que les $\|a_i x_i\|$ soient distincts, alors $\|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \|a_i x_i\| > 0$

En particulier, si $\|x_i\|$ ont des classes distinctes dans $\mathbb{R}_+^\times / |k^\times|$, alors $(x_i)_{i=1}^n$ est linéairement indépendant. ✱

Proposition 2.12 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $\alpha \in]0,1]$, $(e_i)_{i=1}^r$ une base α-orthogonal de V et $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ sa base duale. Alors

(1) $\forall\, i \in \{1, \dots, r\}$, $\quad 1 \leqslant \|e_i^\vee\|^* \cdot \|e_i\| \leqslant \alpha^{-1}$

(2) La base duale $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ est α-orthogonale pour la norme duale $\|\cdot\|^*$

Preuve. (1) On a $e_i^\vee(e_i) = 1$. qui conduit à

$$1 = |1| \leqslant \|e_i^\vee\|^* \cdot \|e_i\|$$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in k^r$. On a

$$e_i^\vee(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r) = \lambda_i .$$

D'où $$\|e_i^\vee\|^* = \sup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0)} \frac{|\lambda_i|}{\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r\|}$$

$$\leqslant \alpha^{-1} \|e_i\|^{-1} .$$

(2) Soit $\xi = a_1 e_1^\vee + \dots + a_r e_r^\vee \in V^*$.

Comme $\xi(e_i) = a_i$, on a

$$\|\xi\|^* \geqslant \frac{|a_i|}{\|e_i\|} \geqslant \alpha \cdot |a_i| \cdot \|e_i^\vee\|^*$$

$\#$

Corollaire 2.13 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur k. On suppose que $\|\cdot\|$ est ultramétrique. Alors $\|\cdot\|^{**} = \|\cdot\|$ sur V.

Preuve Soit $\alpha \in]0,1[$. D'après le théorème 2.11, il existe une base α-orthogonale $(e_i)_{i=1}^r$ de $(V, \|\cdot\|)$.

Soit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in V$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ on a

$$\|x\|^{**} \geqslant \frac{|e_i^\vee(x)|}{\|e_i^\vee\|^*} = \frac{|\lambda_i|}{\|e_i^\vee\|^*} \underset{\text{Prop. 2.12}}{\geqslant} \alpha |\lambda_i| \cdot \|e_i\| .$$

D'où $\|x\|^{**} \geqslant \alpha \|x\|$. Comme α est arbitraire, on obtient $\|x\|^{**} \geqslant \|x\|$, et donc $\|x\|^{**} = \|x\|$. ∎

Proposition 2.14 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur k

(1) $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^{**}$ induisent la même norme duale sur V^*

(2) Si W est un espace quotient de rang 1 de V, alors $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|^{**}$ induisent la même norme quotient sur W

(3) On suppose $|\cdot|$ non-archimédienne, alors $\|\cdot\|^{**}$ est la plus grande norme ultramétrique bornée supérieurement par $\|\cdot\|$.

Preuve (1) $(\|\cdot\|^{**})^* = (\|\cdot\|^*)^{**} = \|\cdot\|^*$.

(2) ~~Soient~~ Soit $\|\cdot\|_W$ la norme quotient de $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_W^*$ sa norme duale. Soit $f : W^* \longrightarrow V^*$ l'homomorphisme dual à la projection $\pi : V \longrightarrow W$.

Pour tout $w \in W \setminus \{0\}$, on a $\|w\|_W = \inf\limits_{\substack{x \in V \\ \pi(x) = w}} \|x\|$

Donc, pour tout $\phi \in W^*$, on a

$$\|\phi\|_W^* = \sup_{w \in W\setminus\{0\}} \frac{|\phi(w)|}{\|w\|_W}$$

$$= \sup_{w \in W\setminus\{0\}} |\phi(w)| \cdot \sup_{\substack{x \in V \\ \pi(x)=w}} \frac{1}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x \in V\setminus W} \frac{|\phi(\pi(x))|}{\|x\|} = \sup_{x \in V\setminus\{0\}} \frac{|f(\phi)(x)|}{\|x\|}$$

$$= \|f(\phi)\|^*$$

Autrement dit. $\|\cdot\|_W^*$ est la restriction de $\|\cdot\|^*$ à W^*.

D'après (1), on obtient (2)

(3) On a vu que $\|\cdot\|^{**} \leqslant \|\cdot\|$. Si $\|\cdot\|_1$ est une norme ultramétrique sur V telle que $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|$, alors $\|\cdot\|_1^* \geqslant \|\cdot\|^*$ et $\|\cdot\|_1^{**} = \|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|^{**}$.

§3 Produits tensoriels, déterminant

<u>Définition</u> 2.15 (de rang fini)

Soient $V_1, \ldots, V_n$ des espaces vectoriels normés sur k. On définit deux fonctions $\|\cdot\|_\varepsilon$ et $\|\cdot\|_\pi$ sur $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ comme la suite :

$$\forall\ \varphi \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad \|\varphi\|_\pi = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{N} \|x_1^{(i)}\| \cdots \|x_n^{(i)}\| \;\middle|\; \varphi = \sum_{i=1}^{N} x_1^{(i)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(i)} \right\}$$

$$\|\varphi\|_\varepsilon = \sup_{\substack{(f_1, \ldots, f_n) \in V_1^* \times \cdots \times V_n^* \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\},\ f_j \neq 0}} \frac{|\varphi(f_1, \ldots, f_n)|}{\|f_1\|^* \cdots \|f_n\|^*}$$

Proposition 2.16 $\|\cdot\|_\varepsilon \leqslant \|\cdot\|_\pi$

Preuve On suppose que $\varphi \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ s'écrit sous la forme

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} x_1^{(i)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(i)}.$$

Pour tout $(f_1, \ldots, f_n) \in V_1^* \times \cdots \times V_n^*$, on a

$$\varphi(f_1, \ldots f_n) = \sum_{i=1}^{N} f_1(x_1^{(i)}) \cdots f_n(x_n^{(i)})$$

Donc $|\varphi(f_1, \ldots f_n)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |f_1(x_1^{(i)})| \cdots |f_n(x_n^{(i)})|$

$$\leqslant \|f_1\|^* \cdots \|f_n\|^* . \sum_{i=1}^{N} |x_1^{(i)}| \cdots |x_n^{(i)}|$$

$\divideontimes$

norme ε-produit tensoriel — norme π-produit tensoriel

Remarque ① $\|\cdot\|_\varepsilon$ et $\|\cdot\|_\pi$ sont des normes sur $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$

② Si $|\cdot|$ est non-archimédienne, alors $\|\cdot\|_\varepsilon$ est toujours ultramétrique. Cependant, $\|\cdot\|_\pi$ n'est pas nécessairement ultramétrique, même si les V_i le sont.

Proposition 2.17 La norme $\|\cdot\|_\varepsilon$ s'identifie au dual de la norme π-produit tensoriel des normes duales sur $V_1^*, \ldots, V_n^*$.

Preuve Soit $\varphi \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Si $(f_1, \ldots, f_n) \in V_1^* \times \cdots \times V_n^*$, on a

$$\frac{|\varphi(f_1, \ldots f_n)|}{\|f_1 \otimes \cdots \otimes f_n\|_\pi} \geqslant \frac{|\varphi(f_1, \ldots f_n)|}{\|f_1\|^* \cdots \|f_n\|^*}$$

Donc $\|\varphi\|_\varepsilon \leqslant \|\varphi\|_\pi^*$

Soit $\alpha \in V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^*$. Si α s'écrit sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=1}^{N} f_1^{(i)} \otimes \cdots \otimes f_n^{(i)}, \quad \text{alors}$$

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(f_1^{(i)}, \dots, f_n^{(i)}).$$

Donc $$|\varphi(\alpha)| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |\varphi(f_1^{(i)}, \dots f_n^{(i)})|$$

$$\leqslant \|\varphi\|_\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \|f_1^{(i)}\|^* \cdots \|f_n^{(i)}\|^*$$

$$\Rightarrow \quad \|\varphi\|_\pi^* \leqslant \|\varphi\|_\varepsilon$$

#

<u>Définition</u> 2.18 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $r = \mathrm{rg}_k(V)$. On définit le déterminant de $\|\cdot\|$ la norme quotient sur $\det(V) = \Lambda^r(V)$ induite par la projection canonique $V^{\otimes r} \longrightarrow \Lambda^r(V)$, où on considère la norme π-produit tensoriel sur $V^{\otimes r}$. Cette norme est notée comme $\|\cdot\|_{\text{dét}}$

<u>Proposition</u> 2.19 $\forall\, \eta \in \text{dét}(V)$, on a

$$\|\eta\|_{\text{dét}} = \inf \left\{ \|x_1\| \cdots \|x_r\| \;\middle|\; \eta = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \right\}.$$

<u>Preuve</u> Si $\eta = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$, alors il est l'image de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ par la projection canonique $V^{\otimes r} \to \Lambda^r(V)$.

Donc $\|\eta\|_{\text{dét}} \leqslant \|x_1\| \cdots \|x_r\|$.

Dans la suite, on démontre l'inégalité inverse.

Par définition

$$\|\eta\|_{\text{dét}} = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{N} \|x_1^{(i)}\| \cdots \|x_r^{(i)}\| \;\middle|\; \eta = \sum_{i=1}^{N} x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge x_r^{(i)} \right\}$$

On suppose que $\eta = \sum_{i=1}^{N} x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge x_r^{(i)}$.

Soit $(e_j)_{j=1}^{r}$ une base de V. Soit $\eta_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, il existe $a_i \in k$ tel que

$x_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge x_r^{(i)} = a_i \eta_0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que les a_i non-nuls

et
$$\frac{\|x_1^{(1)}\| \cdots \|x_r^{(1)}\|}{|a_1|} = \min_{i \in \{1, \ldots, N\}} \frac{\|x_1^{(i)}\| \cdots \|x_r^{(i)}\|}{|a_i|}$$

On a $\eta = (a_1 + \cdots + a_N)\eta_0 = \left(1 + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_N}{a_1}\right) x_1^{(1)} \wedge \cdots \wedge x_r^{(1)}$

et
$$\left|1 + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_N}{a_1}\right| \cdot \|x_1^{(1)}\| \cdots \|x_r^{(1)}\|$$

$$\leq \left(1 + \left|\frac{a_2}{a_1}\right| + \cdots + \left|\frac{a_N}{a_1}\right|\right) \|x_1^{(1)}\| \cdots \|x_r^{(1)}\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N} \|x_1^{(i)}\| \cdots \|x_r^{(i)}\|.$$

Remarque Soit $(V, \|\cdot\|)$ un fibré vectoriels normé de rang r sur k *

On a $\inf\left\{ \frac{\|x_1\| \cdots \|x_r\|}{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|} \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_r) \in V^r,\ x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \neq 0 \right\} = 1$

Si le minimum est atteint par $(e_1, \ldots, e_r) \in V^r$, on dit que $(e_i)_{i=1}^{r}$ est une base d'Hadamard.

Proposition 2.20 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang r.

(1) Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base de V. Elle est α-orthogonale avec

$$\alpha = \frac{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{\det}}{\|e_1\| \cdots \|e_r\|}$$

En particulier, toute base d'Hadamard est orthogonale.

(2) Si le corps $(k, |\cdot|)$ est localement compact, alors V admet une base d'Hadamard.

(3) On suppose que $|\cdot|$ est non-archimédienne. Si $(x_i)_{i=1}^r$ est une base α-orthogonale, où $\alpha \in]0,1]$, alors

$$\frac{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|_{\det}}{\|x_1\| \cdots \|x_r\|} \geqslant \alpha^r.$$

En particulier, toute base orthogonale est une base d'Hadamard.

Preuve (1) Soit $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in V$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$1 = \alpha \cdot \frac{\|e_1\| \cdots \|e_r\|}{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|} \leqslant \frac{\|e_1\| \cdots \|e_{i-1}\| \cdot \|x\| \cdot \|e_{i+1}\| \cdots \|e_r\|}{\underbrace{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge x \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_r\|}_{= |\lambda_i| \cdot \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|}}$$

Donc $\|x\| \geqslant \alpha |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$.

(2) Si $(k, |\cdot|)$ est localement compact, $(V, \|\cdot\|)$ l'est aussi. En outre, la fonction

$$(x_1, \ldots, x_r) \in (V \setminus \{0\})^r \longmapsto \frac{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|}{\|x_1\| \cdots \|x_r\|}$$

est continue, et invariante par l'action de $(k^\times)^r$

Donc elle atteint son maximum, qui est égal à 1.

(3) Soit $(y_i)_{i=1}^r$ un élément de V^r tel que $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_1 \wedge \cdots \wedge y_r$

On écrit y_i sous la forme $y_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j$. Alors

$$\forall j \qquad |a_{ij}| \leq \alpha^{-1} \frac{\|y_i\|}{\|x_j\|}$$

car la base $(x_i)_{i=1}^r$ est α-orthogonale.

Soit A la matrice (a_{ij}). On a $\det(A) = 1$

En outre, comme $|\cdot|$ est non-archimédienne,

$$1 = |\det(A)| \leq \alpha^{-r} \frac{\|y_1\| \cdots \|y_r\|}{\|x_1\| \cdots \|x_r\|}$$

Donc $\dfrac{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\|}{\|x_1\| \cdots \|x_r\|} \geq \alpha^r$ comme $(y_1, \ldots, y_r)$

est arbitraire.

⚠ La condition " $|\cdot|$ est non-archimédienne " dans (3) est essentielle. Voici un contre-exemple quand $k = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue usuelle.

$$V = \mathbb{R}^2 \qquad \|(a,b)\| = \max(|a|, |b|).$$

Soient $e_1 = (1,0)$ $e_2 = (0,1)$.

Alors la base $\{e_1, e_2\}$ est orthonormale. Cependant

$$e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$$

Donc $\|e_1 \wedge e_2\| \leq \frac{1}{2}$.

Dans le cas archimédien, on a le résultat suivant.

(4) On suppose que $|\cdot|$ est archimédienne, et $\|\cdot\|$ est préhilbertienne. Alors toute base orthogonale de V est une base d'Hadamard.

<u>Preuve</u>. $(k, |\cdot|)$ étant localement compact, il existe une base d'Hadamard $(e_i)_{i=1}^r$ qui est orthogonale. Sans perte de généralité, on peut la supposer orthonormée.

Soit $(x_i)_{i=1}^r$ une base orthonormée.

Il existe une matrice orthogonal A ou unitair si $k=\mathbb{C}$ telle que $(x_i)_{i=1}^r = A(e_i)_{i=1}^r$

On a $|\det(A)|=1$ et donc

$$\|x_1\wedge\cdots\wedge x_r\| = \|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\| = 1 = \|x_1\|\cdots\|x_r\|$$

Donc $(x_i)_{i=1}^r$ est une base d'Hadamard.

⁂

§4 Suites exactes

<u>Définition</u> 2.21 Soient V', V, V'' trois espaces vectoriels normés de rang fini sur k. On appelle suite exacte un diagramme de la forme

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$$

qui est une suite exacte usuelle ~~de~~ comme diagramme d'homomorphism entre les espaces vectoriels sur k, et tel que

(1) la norme sur V' s'identifie à la norme restriction
(2) la norme sur V'' s'identifie à la norme quotient

induits par la norme de V

<u>Proposition</u> 2.22 Soit $0 \to V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \to 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels normés. Alors l'isomorphisme canonique $\det(V') \otimes \det(V'') \longrightarrow \det(V)$ a pour norme d'opérateur ≤ 1.

<u>Preuve</u> Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une base de V'. Soit $\{y_1, \ldots, y_m\}$ une famille d'éléments de $V \setminus f(V')$ dont l'image dans V'' forme une base de V''. On a

$$\| f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n) \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdot \|y_1\| \cdots \|y_m\|$$

Si on remplace y_i par un y_i' dans la même classe de $V / f(V')$, on a $f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n) \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m$

$$= f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n) \wedge y_1' \wedge \cdots \wedge y_m'.$$

Donc on obtient

$$\| f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n) \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m \| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\| \cdot \|g(y_1)\| \cdots \|g(y_m)\|.$$

Cela implique que

$$\frac{\|f(x_1) \wedge \cdots \wedge f(x_n) \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_m\|}{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\| \cdot \|g(y_1) \wedge \cdots \wedge g(y_m)\|} \leq \frac{\|x_1\| \cdots \|x_n\|}{\|x_1 \wedge \cdots \wedge x_n\|} \cdot \frac{\|g(y_1)\| \cdots \|g(y_m)\|}{\|g(y_1) \wedge \cdots \wedge g(y_m)\|}$$

✡

Définition 2.23 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. On définit

$$\delta(V, \|\cdot\|) := \frac{1}{\|\eta\|_{\det} \cdot \|\eta^\vee\|^*_{\det}}$$

où $\eta \in \det(V) \setminus \{0\}$, $\|\cdot\|^*_{\det}$ est la norme déterminant de la norme duale $\|\cdot\|^*$ sur V^*. (on identifie $\det(V^*)$ au dual de $\det(V)$)

Proposition 2.24 (1) $\delta(V, \|\cdot\|) \geq 1$

(2) Si $|\cdot|$ est non-archimédienne, ou $\|\cdot\|$ est préhilbertienne, alors $\delta(V, \|\cdot\|) = 1$.

Preuve (1) Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base α-orthogonal. $\alpha \in]0,1[$ Soit $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ sa base duale. D'après la proposition 2.12, on a $\|e_i^\vee\|^* \cdot \|e_i\| \leq \alpha^{-1}$.

On prend $\eta = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$. Alors $\eta^\vee = e_1^\vee \wedge \cdots \wedge e_r^\vee$.

On a

$$\|\eta\|_{\det} \cdot \|\eta^\vee\|^*_{\det} \leq \|e_1\| \cdots \|e_r\| \cdot \|e_1^\vee\|^* \cdots \|e_r^\vee\|^* \leq \alpha^{-r}$$

(2) Cas non-archimédien : Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base α-orthogonale $\alpha \in]0,1[$. Alors la base dual $(e_i^\vee)_{i=1}^r$ est aussi α-orthogonale (Prop. 2.12). D'après la proposition 2.20.

$$\frac{\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{\det}}{\|e_1\| \cdots \|e_r\|} \geq \alpha^r, \quad \frac{\|e_1^\vee \wedge \cdots \wedge e_r^\vee\|^*_{\det}}{\|e_1^\vee\|^* \cdots \|e_r^\vee\|^*} \geq \alpha^r$$

En outre, $\forall i \quad 1 \leq \|e_i\| \cdot \|e_i^\vee\|^*$. Donc $\delta(V, \|\cdot\|) \leq \alpha^{-2r}$

Cas préhilbertien : Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base orthogonale.

Elle est une base d'Hadamard (Prop. 2.12(4)). Sa base duale est aussi une base d'Hadamard. On obtient le résultat par un argument similaire au cas non-archimédien. #

Proposition 2.25 Soit $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels de rang fini et normés sur k. La norme d'opérateur de l'isomorphisme canonique

$$\det(V') \otimes \det(V'') \xrightarrow{f} \det(V)$$

est bornée inférieurement par

$$\frac{\delta(V')\,\delta(V'')}{\delta(V)} \geq \delta(V)^{-1}.$$

Preuve. Soient $\alpha \in \det(V') \setminus \{0\}$, $\beta \in \det(V'') \setminus \{0\}$.

Soient $\alpha^\vee \in \det(V')^*$ et $\beta^\vee \in \det(V'')^*$ leurs éléments duals.

Soient η l'image canonique de $\alpha \otimes \beta$ dans $\det(V)$.

$\eta^\vee$ l'image canonique de $\alpha^\vee \otimes \beta^\vee$ par l'isomorphisme canonique

$$\det(V')^* \otimes \det(V'')^* \longrightarrow \det(V)^*$$

Alors $\eta^\vee$ est l'élément dual de η.

Exercice. Montrer que $0 \to (V'')^* \to V^* \to (V')^* \to 0$ est une suite exacte, où on considère les normes duals

D'après la proposition 2.22, on a

$$\|\eta^\vee\|_{\det}^* \leq \|\alpha^\vee\|_{\det}^* \cdot \|\beta^\vee\|_{\det}^*$$

d'où $$\frac{\delta(V')\,\delta(V'')}{\delta(V)} = \frac{\|\eta^\vee\|^*_{\text{dét}} \cdot \|\eta\|_{\text{dét}}}{\|\alpha^\vee\|^*_{\det} \cdot \|\alpha\|_{\det} \cdot \|\beta\|_{\det} \cdot \|\beta^\vee\|^*_{\det}}$$

$$\leqslant \frac{\|\eta\|_{\text{dét}}}{\|\alpha\|_{\text{dét}} \cdot \|\beta\|_{\text{dét}}} = \|f\|$$

✠

Corollaire 2.26 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. Si W_1 et W_2 sont deux sous-espaces vectoriels de V, alors l'isomorphisme canonique

$$\text{dét}(W_1 \cap W_2) \otimes \text{dét}(W_1 + W_2) \longrightarrow \text{dét}(W_1) \otimes \text{dét}(W_2)$$

induit par la suite exacte (d'espaces vectoriels)

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow W_1 \cap W_2 \longrightarrow W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 \longrightarrow 0$$

a pour norme d'opérateur $\leqslant \delta(W_1 + W_2)$.

⚠ Métriquement $(*)$ n'est pas nécessairement une suite exacte.

Preuve. On considère la suite exacte d'espaces vectoriels normés

$$0 \longrightarrow W_1 \cap W_2 \longrightarrow W_1 \longrightarrow \underbrace{W_1/(W_1 \cap W_2)}_{} \longrightarrow 0.$$

noté comme G (muni de la métrique quotient)

L'élément canonique $\eta \in \text{dét}(W_1)^* \otimes \det(W_1 \cap W_2) \otimes \text{dét}(G)$

a pour norme $\leqslant 1$.

Similairement, on considère

$$0 \longrightarrow W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 \longrightarrow \underbrace{(W_1 + W_2)/W_2}_{} \longrightarrow 0$$

noté comme G' (muni de la métrique quotient)

L'élément canonique $\eta' \in \text{dét}(W_2)^* \otimes \text{dét}(G')^* \otimes \text{dét}(W_1 + W_2)$

a pour norme $\leqslant \delta(W_1 + W_2)$.

On en déduit $\|\eta \otimes \eta'\| \leqslant \delta(W_1+W_2)$

Soit $f : G \to G'$ l'isomorphisme canonique. On a $\|f\| \leqslant 1$.

Donc l'élément canonique de $\det(G) \otimes \det(G')^*$ a pour norme $\geqslant 1$. On en déduit que l'élément canonique de $\det(W_1)^* \otimes \det(W_2)^* \otimes \det(W_1 \cap W_2) \otimes \det(W_1+W_2)$ a pour norme $\leqslant \delta(W_1+W_2)$

§5 Ellipsoïde de John-Löwner

Dans ce paragraphe, on suppose que $|\cdot|$ est archimédienne.

Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.27 (John-Löwner) Soit V un espace vectoriel de rang fini sur k, muni d'une norme $\|\cdot\|$. Il existe alors un produit hilbertien $\langle , \rangle$ sur V tel que

$$\forall x \in V, \quad \|x\|_h \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{r}\, \|x\|_h$$

où r est le rang de V sur k, et $\|\cdot\|_h$ est la norme induite par $\langle , \rangle$.

Démonstration

Étape 1 On fixe un produit hilbertien $\langle , \rangle'$ sur V.

Soit $\textcircled{H}$ l'ensemble des endomorphismes de V qui sont auto-adjoints par rapport à $\langle , \rangle'$. C'est un sous-espace $\mathbb{R}$-vectoriel de $\mathrm{End}_k(V)$.

Soit $\mathcal{H}^+$ le sous-ensemble des opérateurs défini-positifs.

L'ensemble $\mathcal{H}^+$ est convexe, ouvert dans $\mathcal{H}$.

(Si deux opérateurs u_1 et u_2 sont auto-adjoints, il existe une base de V dans laquelle u_1 et u_2 se diagonalisent simultanément)

En outre, la fonction $\log(\det(\cdot))$ est strictement concave sur $\mathcal{H}^+$

Étape 2 Soit $B = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$

Pour tout $u \in \mathcal{H}^+$, soit $B_u = \{x \in V \mid \langle x, u(x)\rangle' \leq 1\}$

Montrons que, pour tout

$$u_0 \in \mathcal{H}_0 := \{u \in \mathcal{H}^+ \mid B_u \supset B\},$$

le sous-ensemble

$$\mathcal{H}(u_0) = \{u \in \mathcal{H}_0 \mid \det(u) \geq \det(u_0)\}$$

est convexe et compact. Donc la fonction $\det(\cdot)$ atteint son maximum en un point unique $u_1 \in \mathcal{H}_0$.

Étape 3 On vérifie que $\langle x, y\rangle = \langle x, u_1(y)\rangle'$ satisfait à la condition prédite par le théorème.

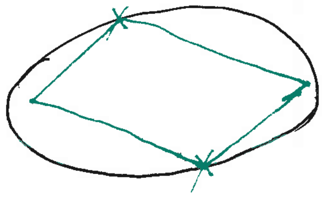
Sans perte de généralité, on peut supposer $\langle\,,\rangle' = \langle\,,\rangle$

On introduit une hypothèse supplémentaire : B est un polytope convexe.

Pour tout $x \in V$ tel que $\|x\| \leq 1$.

Soit $\varphi_x : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \langle x, u(x)\rangle$$



Lemme Si $u : V \to V$ est un élément de $\mathcal{H}$ tel que $\varphi_x(u) \leq 0$ pour tout $x \in B$ avec $\langle x, x \rangle = 1$, alors on a $\mathrm{Tr}(u) \leq 0$

Preuve. On a $\mathrm{Id} + \varepsilon u \in \mathcal{H}_0$ pour $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit

$$\Rightarrow \quad \det(\mathrm{Id} + \varepsilon u) \leq \det(\mathrm{Id}) = 1 \qquad \Rightarrow \mathrm{Tr}(u) \leq 0$$

$$\text{car} \quad \mathrm{Tr} = D_{\mathrm{Id}} \det$$

⁂

Conséquence $\mathrm{Tr}(\cdot)$ appartient au cône positif dans $\mathcal{H}^\vee$ engendré par $\varphi_x(\cdot)$ $\quad (x \in B,\ \langle x, x \rangle = 1)$

Il existe alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ et $x_1, \dots, x_n$ dans $B \cap \{x \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ tels que

$$(*) \qquad \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x_i, u(x_i) \rangle \qquad \forall u \in \mathcal{H}$$

On l'applique à $u = \mathrm{Id}$ et obtient

$$r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Soit $y \in V$. $\langle y, y \rangle = 1$. Alors $u(x) = \langle y, x \rangle y$ est un endomorphisme auto-adjoint (projection orthogonale). Sa trace est égale à 1. On applique $(*)$ à u et obtient

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, |\langle x_i, y \rangle|^2$$

Donc il existe i tel que $|\langle x_i, y\rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{r}}$ car sinon

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r}\lambda_n = 1$$

Comme B est invariant par la multiplication par un scalaire $\lambda \in k$ avec $|\lambda| = 1$, on obtient que

$$\forall y \in V,\ \langle y, y\rangle = 1,\ \text{il existe } x \in B \text{ avec}$$

$$\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \geq \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Enfin, on vérifie que B contient tout point $x \in V$ avec

$$\langle x, x\rangle \leq \frac{1}{r}.$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in V$ tel que $\langle x_0, x_0\rangle \leq \frac{1}{r}$ et $\|x\| > 1$.

On choisit une fonction affine $f : V \to \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$ et $f(x) < 0$ pour tout $x \in B$.

Par le théorème de Riesz, il existe $y \in V$, tel que

$$\forall x \in V,\quad f(x) = \mathrm{Re}\langle y, x\rangle + f(0).$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\langle y, y\rangle = 1$.

On a

$$0 = f(x_0) = \mathrm{Re}\langle y, x_0\rangle + f(0) \leq \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}} \langle x_0, x_0\rangle^{\frac{1}{2}} + f(0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r}} + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) \geq -\frac{1}{\sqrt{r}}.$$

Cependant, $\exists\, x \in B$, $\mathrm{Re}\langle y, x\rangle \geq \frac{1}{\sqrt{r}}$. Donc

$$0 > f(x) = \mathrm{Re}\langle y, x\rangle + f(0) \geq 0.$$ une contradiction.

Si on prend $\|x\|_h = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, alors $\|\cdot\|_h \leq \|\cdot\|$ car

$B \subset \{x \in V, \ \langle x, x\rangle \leq 1\}$.

En outre, comme $\langle x, x\rangle \leq \frac{1}{r} \Rightarrow \|x\| \leq 1$, on a

$\|\cdot\| \leq \sqrt{r}\ \|\cdot\|_h$. appelée la norme de John

<u>Étape</u> 4 Cas général.

On prend une suite décroissante de normes $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $B_n = \{x \in V, \ \|x\|_n \leq 1\}$ soit un polytope. et que la suite $\left(\sup\limits_{0\neq x\in V} \dfrac{\|x\|_n}{\|x\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 quand $n \to +\infty$. Pour tout n, soit $\|\cdot\|_{n,h}$ la norme de John associée à $\|\cdot\|_n$. Si on considère les produits hilbertiens comme des éléments de $\oplus^+$, ces normes appartienne à un sous-ensemble fermé et borné de $\oplus$. Donc il existe une sous-suite qui converge dans $\oplus$. La limite doit être la norme de John associée à $\|\cdot\|$. Par le résultat que l'on a obtenu, on a

$$\|\cdot\|_{n,h} \leq \|\cdot\|_n \leq \sqrt{r}\ \|\cdot\|_{n,h}$$

Par passage à la limite, on obtient le résultat souhaité.

$\maltese$

Définition 2.28 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de rang fini sur k.
On désigne par $\|\cdot\|_J$ l'unique norme hilbertienne sur V telle que $\|\cdot\|_J \leq \|\cdot\|$ et que $\|\cdot\|_{J,\text{dét}}$ soit maximale. Similairement, on désigne par $\|\cdot\|_L$ l'unique norme hilbertienne sur V telle que $\|\cdot\|_L \geqslant \|\cdot\|$ et que $\|\cdot\|_{L,\text{dét}}$ soit minimale.

On a $\|\cdot\|_L = ((\|\cdot\|^*)_J)^*$.

On note $\Delta(V, \|\cdot\|) = \dfrac{\|\cdot\|_{L,\text{dét}}}{\|\cdot\|_{\text{dét}}}$. Ainsi $\Delta(V^*, \|\cdot\|^*) = \dfrac{(\|\cdot\|)^*_{J,\text{dét}}}{\|\cdot\|^*_{\text{dét}}}$.

Soit en outre $\lambda(V, \|\cdot\|) = \|\eta\|_{L,\text{dét}} \cdot \|\eta^\vee\|^*_{J,\text{dét}} = \dfrac{\|\cdot\|_{L,\text{dét}}}{\|\cdot\|_{J,\text{dét}}}$
où η est un élément non-nul de $\text{dét}(V)$

Corollaire 2.29

(1) $\max\left(\Delta(V, \|\cdot\|), \Delta(V^*, \|\cdot\|^*)\right) \leqslant r^{\frac{r}{2}}$, où $r = \text{rg}_k(V)$

(2) $\Delta(V, \|\cdot\|)\, \Delta(V^*, \|\cdot\|^*) = \lambda(V, \|\cdot\|)\, \delta(V, \|\cdot\|)$

(3) $\delta(V, \|\cdot\|) \leqslant \min\left(\Delta(V, \|\cdot\|), \Delta(V^*, \|\cdot\|^*)\right)$
$\leqslant \max\left(\Delta(V, \|\cdot\|), \Delta(V^*, \|\cdot\|^*)\right) \leqslant \lambda(V, \|\cdot\|)$.

Preuve (1) résulte directement du théorème 2.27

(2) Soit η un élément non-nul de $\text{dét}(V)$. On a

$$\Delta(V, \|\cdot\|)\, \Delta(V^*, \|\cdot\|^*) = \frac{\|\eta\|_{L,\text{dét}} \cdot \|\eta^\vee\|^*_{J,\text{dét}}}{\|\eta\|_{\text{dét}}\ \ \|\cdot\eta^\vee\|^*_{\text{dét}}} = \lambda(V, \|\cdot\|)\, \delta(V, \|\cdot\|)$$

(3) On a $\|\cdot\|_J \leqslant \|\cdot\|$, donc $\|\cdot\|_{J,\text{dét}} \leqslant \|\cdot\|_{\text{dét}}$.

Donc $\lambda(V, \|\cdot\|) \geqslant \Delta(V, \|\cdot\|)$

En outre, λ est invariant par la dualité, donc

$$\lambda(V, \|\cdot\|) \geqslant \Delta(V^*, \|\cdot\|^*)$$

D'après (2), on obtient $\delta(V, \|\cdot\|) \leqslant \min\big(\Delta(V, \|\cdot\|), \Delta(V^*, \|\cdot\|^*)\big)$

§6 Produit tensoriel de Hilbert-Schmidt

On suppose encore $|\cdot|$ archimédienne.

<u>Définition</u> 2.30 Soient V et W deux espaces vectoriels de rang fini sur k, munis des normes hilbertiennes. On identifie $V \otimes_k W$ à $\mathrm{Hom}_k(V^*, W)$, et le munit de la norme associée au produit hilbertien

$$\forall f, g \in \mathrm{Hom}_k(V^*, W), \quad \langle f, g\rangle_{HS} := \mathrm{Tr}(f^* \circ g)$$

où f^* est l'opérateur adjoint de f (qui envoie W vers V^*)

Cette norme est notée comme $\|\cdot\|_{HS}$, appelée le produit tensoriel de Hilbert-Schmidt des normes (hilbertiennes) de V et W.

⚠ Pas bien définie si les normes de V et W ne sont pas hilbertiennes.

<u>Remarque</u> ① $\|\cdot\|_{HS}^*$ s'identifie au produit de Hilbert-Schmidt des normes duales.

② Si $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_j)_{j=1}^m$ sont des bases orthonormées de V et W respectivement, alors $(e_i \otimes f_j)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$ est une base orthonormée de $V \otimes_k W$ par rapport à la norme produit tensoriel de Hilbert-Schmidt.

<u>Proposition</u> 2.31 On a

$$\|\cdot\|_\varepsilon \leqslant \|\cdot\|_{HS} \leqslant \min(\mathrm{rg}_k(V), \mathrm{rg}_k(W))^{\frac{1}{2}} \|\cdot\|_\varepsilon$$

$$\|\cdot\|_\pi \geqslant \|\cdot\|_{HS} \geqslant \min(\mathrm{rg}_k(V), \mathrm{rg}_k(W))^{\frac{1}{2}} \|\cdot\|_\pi .$$

<u>Preuve</u> : On suppose $\mathrm{rg}_k(V) \leqslant \mathrm{rg}_k(W)$.

Soit $\varphi \in V \otimes_k W$, vu comme un homomorphisme dans $\mathrm{Hom}_k(V^*, W)$. Rappelons que $\varphi^* \circ \varphi : V^* \longrightarrow V^*$ est auto-adjoint, et semi-positifs.

Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r$ des valeurs propres de $\varphi^* \circ \varphi$.

On a $\|\varphi\|_{HS} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)^{\frac{1}{2}}$.

En outre, la norme $\|\varphi\|_\varepsilon$ s'identifie à la norme d'opérateur (quand on considère φ comme un élément dans $\mathrm{Hom}_k(V^*, W)$). Donc $\|\varphi\|_\varepsilon = \lambda_1^{\frac{1}{2}}$.

En effet, si $\alpha_1, \dots \alpha_r$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Pour $(a_1, \dots, a_r) \in k^r$, on a

$$\|\varphi(a_1\alpha_1 + \cdots a_r\alpha_r)\|^2 = \langle \varphi^* \circ \varphi(a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r), a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r \rangle = \sum_{i=1}^r |a_i|^2 \lambda_i$$

§7 Extension de scalaires.

Dans ce paragraphe, on fixe une extension K/k muni d'une valeur absolue qui prolonge $|\cdot|$ sur k (notée encore comme $|\cdot|$). On suppose de plus que $(K, |\cdot|)$ est complet.

<u>Définition</u> 2.32 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. On identifie $V \otimes_k K$ à $\mathrm{Hom}_k(V^*, K)$ et on désigne par $\|\cdot\|_K$ la norme d'opérateur sur $V \otimes_k K$.

<u>Proposition</u> 2.33 (1) Pour tout $x \in V$, on a $\|x\|_K = \|x\|^{**}$

(2) Si $(k, |\cdot|)$ est non-archimédienne, alors $\|\cdot\|_K$ est la plus grande norme ultramétrique sur $V \otimes_k K$ qui prolonge $\|\cdot\|^{**}$

(3) $(\|\cdot\|^{**})_K = \|\cdot\|_K$.

<u>Preuve</u>.

(1) Soit $l_x : V^* \longrightarrow k$ l'application k-linéaire correspondant au vecteur x. Vu comme une application linéaire $V^* \longrightarrow K$, la norme d'opérateur ne change pas.

(2) On a vu dans (1) que $\|\cdot\|_K$ prolonge $\|\cdot\|^{**}$

Supposons que $\|\cdot\|'$ est une norme ultramétrique sur $V \otimes_k K$ qui prolonge $\|\cdot\|^{**}$.

Soient $\alpha \in]0,1[$ et $(e_i)_{i=1}^r$ une base α-orthogonale de V

Si $x = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r \in V \otimes_k K$, où $(a_1, \dots, a_r) \in K^r$,

on a

$$\|x\|_K = \|\ell_x\| \geq \frac{|\ell_x(e_i^\vee)|}{\|e_i^\vee\|^*} = \frac{|a_i|}{\|e_i^\vee\|^*} \geq \alpha |a_i| \cdot \|e_i\|$$

↑ norme d'opérateur ↙ Prop. 2.12

Donc $(e_i)_{i=1}^r$ est une base α-orthogonal de $(V \otimes_k K, \|\cdot\|_K)$

On en déduit

$$\alpha \|x\|' = \alpha \|a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r\|' \leq \alpha \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |a_i| \cdot \|e_i\|'$$

$$= \alpha \max_{i \in \{1, \dots, r\}} |a_i| \cdot \|e_i\|^{**} \leq \|x\|_K$$

Comme α est arbitraire, on obtient $\|\cdot\|' \leq \|\cdot\|_K$.

(3) résulte directement de (2).

$\divideontimes$

<u>Corollaire</u> 2.34 Si $(K', |\cdot|)$ est une extension valuée et complète de $(K, |\cdot|)$, alors on a $\|\cdot\|_{K'} = (\|\cdot\|_K)_{K'}$.

<u>Preuve</u> On utilise la maximalité de $\|\cdot\|_{K'}$.

$\divideontimes$

<u>Proposition</u> 2.35 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. On suppose que $|\cdot|$ est non-archimédienne. Si $(e_i)_{i=1}^r$ est une base d'Hadamard de $(V, \|\cdot\|)$, elle est aussi une base d'Hadamard de $(V \otimes_k K, \|\cdot\|_K)$. En outre, on a $\|\cdot\|_{K, \det} = \|\cdot\|_{\det, K}$.

Preuve Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base d'Hadamard de $(V, \|\cdot\|)$.

D'après la proposition 2.20, elle est une base orthogonale de $(V, \|\cdot\|)$.

On a vu dans la preuve de la proposition 2.33 que $(e_i)_{i=1}^r$ est une base orthogonale de $(V \otimes_k K, \|\cdot\|_K)$. D'après la proposition 2.20, $(e_i)_{i=1}^r$ est une base d'Hadamard de $(V \otimes_k K, \|\cdot\|_K)$.

Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $(e_i)_{i=1}^r$ une base α-orthogonale de $(V, \|\cdot\|)$ qui est aussi une base α-orthogonale de $(V \otimes_k K, \|\cdot\|_K)$.

On a
$$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{K, \text{dét}} \geqslant \alpha^r \|e_1\|_K \cdots \|e_r\|_K$$

Prop. 2.20

Lemme
$$= \alpha^r \|e_1\|^{**} \cdots \|e_r\|^{**}$$

$$\|e_i\|^{**} \geqslant \alpha \|e_i\|$$

Preuve Soit $\|\cdot\|'$ la norme

$$\|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|' := \alpha \max_i |\lambda_i| \cdot \|e_i\|$$

On a $\|\cdot\|' \leqslant \|\cdot\|$. Comme $\|\cdot\|'$ est ultramétrique, on a $\|\cdot\|' \leqslant \|\cdot\|^{**}$.

※

D'après le lemme, on a

$$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{K, \text{dét}} \geqslant \alpha^{2r} \|e_1\| \cdots \|e_r\| \geqslant \alpha^{2r} \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|$$

Réciproquement

$$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{K, \text{dét}} \leqslant \|e_1\|_K \cdots \|e_r\|_K \leqslant \|e_1\| \cdots \|e_r\| \leqslant \alpha^{-r} \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|$$

※

Proposition 2.36 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. Soient $\|\cdot\|_K^*$ le dual de $\|\cdot\|_K$ et $\|\cdot\|^*_K$ la norme induite par $\|\cdot\|^*$ par extension de scalaire. Alors

① On a $\|\cdot\|_K^* \geq \|\cdot\|^*_K$

② La restriction de ces normes sur V^* sont égales

③ Si $|\cdot|$ est non-archimédienne, ces normes sont égales.

Preuve ① Soit $\varphi \in V^* \otimes_k K$. On a

$$\|\varphi\|_K^* = \sup_{\substack{x \in V \otimes_k K \\ x \neq 0}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_K} \underset{\text{Prop. 2.33}}{\geq} \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|^{**}} = \|\varphi\|^*_K$$

② Pour $x \in V \otimes_k K$, on a

$$\|x\|_K = \sup_{\alpha \in V^* \setminus \{0\}} \frac{|\alpha(x)|}{\|\alpha\|^*}.$$

Si $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$, alors $\|x\|_K \geq \dfrac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|^*}$

D'où $\|\varphi\|_K^* \leq \sup\limits_{\substack{x \in V \otimes_k K \\ x \neq 0}} \|\varphi\|^* = \|\varphi\|^*_K$

③ On a vu dans la proposition 2.35 que

$\|\cdot\|_{\text{dét},K} = \|\cdot\|_{K,\text{dét}}$.

Soit $\eta \in \det(V)$, $\eta \neq 0$ on a $\|\eta^\vee\|_K^*{}_{\text{dét}}$

$$= \|\eta^\vee\|_{K,\text{dét}}^* \underset{\text{Prop. 2.35}}{=} \|\eta\|^{-1}_{\cancel{K},\text{dét},K} = \|\eta\|^{-1}_{\text{dét}} = \|\eta^\vee\|^*_{\text{dét}} \overset{\text{Prop 2.35}}{=} \|\eta^\vee\|^*_{K,\text{dét}}$$

Par ①, on obtient l'égalité

Proposition 2.37 Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue usuelle). On a

$$\|\cdot\|_{\det, \mathbb{C}} \geqslant \|\cdot\|_{\mathbb{C}, \det} \geqslant \frac{\delta(V)}{\delta(V_{\mathbb{C}})} \|\cdot\|_{\det, \mathbb{C}}$$

Preuve Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base d'Hadamard. On a

$$\|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{\mathbb{C}, \det} \leqslant \|e_1\|_{\mathbb{C}} \cdots \|e_r\|_{\mathbb{C}} = \|e_1\| \cdots \|e_r\|$$

$$= \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{\det} = \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{\det, \mathbb{C}}.$$

Soit $\eta \in \det(V) \setminus \{0\}$ et $\eta^\vee$ son élément dual.

On a $\|\eta\|_{\det} \cdot \|\eta^\vee\|^*_{\det} = \delta(V)^{-1}$ par définition.

En outre, si $(\alpha_i)_{i=1}^r$ est une base d'Hadamard de $(V^*, \|\cdot\|^*)$, on a

$$\|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r\|^*_{\det, \mathbb{C}} = \|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r\|^*_{\det} = \|\alpha_1\|^* \cdots \|\alpha_r\|^*$$

$$= \|\alpha_1\|_{\mathbb{C}}^* \cdots \|\alpha_r\|_{\mathbb{C}}^* \geqslant \|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r\|_{\mathbb{C}}^{*}{}_{\det}$$

Prop. 2.36

Donc $$\|\eta\|_{\det} = \frac{\delta(V)^{-1}}{\|\eta^\vee\|^*_{\det}} \leqslant \frac{\delta(V_{\mathbb{C}})}{\delta(V)} \|\eta\|_{\mathbb{C}, \det}$$

Proposition 2.38 Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels normés de rang fini sur k, et $f : V_1 \to V_2$ une application k-linéaire. Alors $\|f_K\| \leqslant \|f\|$.
L'égalité est vraie si V_2 est réflexif.

<u>Preuve</u> Montrons d'abord $\|f^\vee\| \leq \|f\|$

$\forall\, \alpha \in V_2^*$, $x \in V_1$, on a

$$|f^\vee(\alpha)(x)| = |\alpha(f(x))| \leq \|\alpha\|^* \, \|f\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \|f^\vee(\alpha)\| \leq \|\alpha\|^* \, \|f\| \Rightarrow \|f^\vee\| \leq \|f\|$$

Soit $\varphi \in V_{1,K}$. Vu comme un élément de $\mathrm{Hom}_K(V_1^*, K)$.

Alors $f_K(\varphi) \in V_{2,K}$, vu comme un élément de $\mathrm{Hom}_K(V_2^*, K)$, envoie $\beta \in V_2^*$ à $\varphi(f^\vee(\beta))$. On a

$$|\varphi(f^\vee(\beta))| \leq \|\varphi\|_K \, \|f^\vee\| \cdot \|\beta\|^*$$

$$\Rightarrow \|f_K(\varphi)\| \leq \|f^\vee\| \cdot \|\varphi\|_K$$

$$\Rightarrow \|f_K\| \leq \|f^\vee\| \leq \|f\|.$$

Si V_2 est réflexif, $\forall\, x \in V_1$ on a

$$\|x\|_K = \|x\|^{**} \leq \|x\|$$

$$\|f_K(x)\|_K = \|f(x)\|_K = \|f(x)\|^{**} = \|f(x)\|$$

$$\Rightarrow \|f_K\| \geq \sup_{x \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|f_K(x)\|_K}{\|x\|_K} \geq \sup_{x \in V_1 \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Proposition 2.39 On suppose que la valeur absolue $|\cdot|$ est non-archimédienne. Soient $(V_1, \|\cdot\|_1)$ et $(V_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces vectoriels normés de rang fini sur k. On suppose que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont ultramétrique. Alors le produit ε-tensoriel de $\|\cdot\|_{1,K}$ et $\|\cdot\|_{2,K}$ est égal à $\|\cdot\|_{\varepsilon,K}$, où $\|\cdot\|_\varepsilon$ désigne le produit ε-tensoriel de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$

Preuve. Soit $\|\cdot\|_\varepsilon'$ le produit ε-tensoriel de $\|\cdot\|_{1,K}$ et $\|\cdot\|_{2,K}$. C'est une norme ultramétrique sur $V_{1,K}\otimes_K V_{2,K}$ qui prolonge $\|\cdot\|_\varepsilon$ sur $V\otimes_k V_2$. Donc on a $\|\cdot\|_\varepsilon' \leq \|\cdot\|_{\varepsilon.K}$.

Lemme
Soit $\alpha \in]0.1[$. Soient $(e_i)_{i=1}^n$ et $(f_j)_{j=1}^m$ des bases α-orthogonals de V_1 et V_2 respectivement. Alors $(e_i\otimes f_j)$ est une base α^2-orthogonale de $(V_1\otimes_k V_2, \|\cdot\|_\varepsilon)$.

Preuve. Soit $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}\, e_i\otimes f_j$

On le considère comme une application k-linéaire de V_1^* à V_2

Soit $(e_i^\vee)_{i=1}^n$ la base duale de $(e_i)_{i=1}^n$. C'est une base α-orthogonale de $(V_1^*, \|\cdot\|_1^*)$. Pour tout i, on a

$$\| T(e_i^\vee)\| = \Big\| \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j \Big\| \geq \alpha \cdot \max_j |a_{ij}| \cdot \|f_j\|$$

$$\Rightarrow \|T\|_\varepsilon \geq \frac{1}{\|e_i^\vee\|^*} \alpha \max_j |a_{ij}|\cdot \|f_j\| \geq \alpha^2 \max_j |a_{ij}| \|e_i\|\cdot\|f_j\|$$

$$= \alpha^2 \max_{j\in\{1\dots m\}} |a_{ij}| \cdot \|e_i\otimes f_j\|_\varepsilon .$$

∗

D'après la proposition 2.33, $(e_i)_{i=1}^{n}$ et $(f_j)_{j=1}^{m}$ sont des bases α-orthogonales de $(V_{1,K}, \|\cdot\|_{1,K})$ et $(V_{2,K}, \|\cdot\|_{2,K})$.

D'après le lemme, $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une base α^2-orthogonale de $(V_{1,K} \otimes_K V_{2,K}, \|\cdot\|'_{\varepsilon})$.

Donc on a $\|T\|'_{\varepsilon} \geq \alpha^2 \|T\|_{\varepsilon,K}$ pour tout T

※