CHAPITRE 3

FIBRÉS ADÉLIQUE : THÉORIE GLOBALE

Dans ce chapitre, on fixe un corps de nombres K et on désigne par M_K l'ensemble des places de K. Rappelons qu'une *place* de K est par définition une classe d'équivalence de valeurs absolues non-triviales sur K, où deux valeurs absolues sur K sont considérées comme équivalentes si elle induisent la même topologie sur K. Si v est une place de K, alors il existe une unique valeur absolue, que l'on notera $|\cdot|_v$ dans la classe d'équivalence v, qui prolonge la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$, ou l'une des valeurs absolue p-adique $|\cdot|_p$ sur $\mathbb{Q}$ (normalisée de sorte que $|p|_p = p^{-1}$), où p est un nombre premier.

Pour tout $v \in M_K$, on désigne par K_v le complété de K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_v$. La valeur absolue s'étend (de façon unique) par continuité sur K_v. Soit en outre $\mathbb{Q}_v$ le complété de $\mathbb{Q}$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_v$. Il s'avère que K_v est un espace vectoriel de rang fini sur $\mathbb{Q}_v$. On désigne par $n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ le rang de K_v sur $\mathbb{Q}_v$. Rappelons la formule du produit comme la suite

$$\forall\, a \in K^{\times}, \quad \prod_{v \in M_K} |a|_v^{n_v} = 1. \tag{3.1}$$

On peut aussi l'écrire sous forme additive :

$$\forall\, a \in K^{\times}, \quad \sum_{v \in M_K} n_v \ln |a|_v = 0. \tag{3.2}$$

On désigne par $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. Rappelons que $\mathcal{O}_K$ s'identifie à l'ensemble des éléments $a \in K$ tels que $|a|_v \leqslant 1$ pour toute place non-archimédienne $v \in M_K$.

3.1. Approximation de valeurs absolues

Pour toute place v de K, par définition le corps K est dense dans K_v. La proposition suivante montre que, si S est un sous-ensemble fini de M_K, alors l'image du plongement diagonal de K dans $\prod_{v \in S} K_v$ est dense.

Lemme 3.1.1. — *Soient $v_1, \ldots, v_n$ des places distinctes de K. Il existe un élément $a \in K$ tel que $|a|_{v_1} > 1$ tandis que $\max_{i \in \{2,\ldots,n\}} |a|_{v_i} < 1$.*

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. Le cas où $n = 1$ est trivial. Traitons le cas où $n = 2$. Comme $v_1 \neq v_2$, les valeurs absolues $|\cdot|_{v_1}$ et $|\cdot|_{v_2}$ ne sont pas équivalentes. Il existe donc $x \in K^\times$ tel que $|x|_{v_1} > 1$ mais $|x|_{v_2} \leqslant 1$. Par la même raison, il existe $y \in K^\times$ tel que $|y|_{v_1} \leqslant 1$ et $|y|_{v_2} > 1$. L'élément $a = xy^{-1}$ vérifie alors la condition demandée.

Dans la suite, on supppose que le résultat a été établi pour le cas de $< n$ places. Montrons le cas de n places. Par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver a et b dams $K^\times$ tels que $|a|_{v_1} > 1$ et $\max_{i \in \{2,\ldots,n-1\}} |a|_{v_i} < 1$, et que $|b|_{v_1} > 1$ et $|b|_{v_n} < 1$. Il existe alors un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$\max_{i \in \{2,\ldots n\}} \left| \frac{a^k b}{1 + a^k} \right|_{v_i} < 1, \quad \left| \frac{a^k b}{1 + a^k} \right|_{v_1} > 1.$$

□

Proposition 3.1.2 **(Approximation faible).** — *Soient S un sous-ensemble fini de M_K et $(a_v)_{v \in S}$ un élément de $\prod_{v \in S} K_v$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a \in K$ tel que $|a - a_v|_v < \varepsilon$ quel que soit $v \in S$.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que les a_v appartiennent à K car K est dense dans K_v. D'après le lemme précédent, on peut trouver des éléments $(\lambda_v)_{v \in S} \in K^S$ tels que $|\lambda_v|_v > 1$ et que $|\lambda_v|_w < 1$ pour $w \in S \setminus \{v\}$. Pour tout entier $m \geqslant 1$ et toute $v \in S$, on note $\lambda_v^{(m)} = \lambda_v^m / (1 + \lambda_v^m)$. On alors

$$\lim_{m \to +\infty} |\lambda_v^{(m)}|_w = \begin{cases} 0, & w \neq v, \\ 1, & w = v. \end{cases}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, soit $x_m = \sum_{v \in S} \lambda_v^{(m)} a_v$. On a alors $x_m \to a_v$ dans K_v quand $m \to +\infty$ pour tout $v \in S$. La proposition est donc démontrée. □

Corollaire 3.1.3 **(Approximation forte).** — *Soient $S \subset M_K$ un sous-ensemble fini de places* non-archimédiennes *et $(a_v)_{v \in S}$ un élément de $\prod_{v \in S} K_v$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $a \in K$ tel que $|a - a_v|_v < \varepsilon$ quel que soit $v \in S$ et que $|a|_w \leqslant 1$ pour toute place non-archimédienne $w \in M_K \setminus S$.*

Démonstration. — Quitte à augmenter S, on peut supposer, sans perte de généralité, que S est de la form $\bigcup_{p \in P} \{v \in M_K \,:\, v \mid p\}$, où P est un ensemble fini de nombres premiers. D'après la proposition 3.1.2, il existe $b \in K$ tel que $|b - a_v|_v < \varepsilon$ pour tout $v \in S$. Soit P' un ensemble fini de nombres premiers tel que $P' \cap P = \varnothing$ et que, pour toute place non-archiédienne $w \in M_K$ au-dessus d'un nombre premier en dehors de $P' \cap P$, on ait $|b|_w = 1$. D'après le théorème des restes chinois, pour tout $\delta > 0$ il existe un entier m tel que $|m - 1|_p < \delta$ pour $p \in P$ et que $|m|_p < \delta$ pour $p \in P'$. Si on choisit δ assez petit, alors l'élément $a = mb$ satisfait aux conditions demandées. □

3.2. ℝ-Diviseurs adéliques sur $\operatorname{Spec} K$

On désigne par $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ l'espace vectoriel libre engendré par M_K. Un élément de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ est appelé un ℝ-*diviseur adélique sur* $\operatorname{Spec} K$. Si a est élément non-nul de K, on désigne par $\widehat{(a)}$ l'élément

$$-\sum_{v\in M_K}(\ln|a|_v)v$$

de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$. Cet élément est bien défini car $|a|_v = 1$ pour tout sauf un nombre fini de places. On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$\widehat{(\cdot)} : K^\times \longrightarrow \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K),$$

qui induit une application ℝ-linear

$$\widehat{(\cdot)}_{\mathbb{R}} : K^\times_{\mathbb{R}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K),$$

où $K^\times_{\mathbb{R}} := K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Si un ℝ-diviseur adélique appartient à l'image de l'application $\widehat{(\cdot)}_{\mathbb{R}}$, on dit qu'il est *principal*. On désigne par $\widehat{\mathrm{Cl}}_{\mathbb{R}}(K)$ le conoyau de $\widehat{(\cdot)}_{\mathbb{R}}$. Si ζ est un ℝ-diviseur adélique sur $\operatorname{Spec} K$, son image dans $\widehat{\mathrm{Cl}}_{\mathbb{R}}(K)$ est notée comme $[\zeta]$. Si ζ et ζ' sont deux ℝ-diviseurs adéliques qui ont la même image dans $\widehat{\mathrm{Cl}}_{\mathbb{R}}(K)$, on dit qu'ils sont *linéairement équivalents*.

Remarque 3.2.1. — Rappelons que le noyau du morphisme de groupe $\widehat{(\cdot)}$ est le groupe μ_K des racines de l'unité dans K. Cela provient du théorème de Kronecker. En effet, si $a \in K^\times$ est un élément tel que $\widehat{(a)} = 0$, alors on a $a \in \mathcal{O}_K$ car $|a|_v = 1$ pour toute place et en particulier $|a|_v \leqslant 1$ pour toute place non-archimédienne. Soient $\{a_1, \ldots, a_d\}$ les conjugés galoisiens de a. Quitte à augmenter le corps de nombres K, on peut supposer $\{a_1, \ldots, a_d\} \subset K$. Il s'avère que, pour toute place v, tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ et tout entier n, on a $|a_i^n|_v = 1$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$, soit

$$s_i(T_1, \ldots, T_d) = \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_i\leqslant d} T_{j_1}\cdots T_{j_i}$$

le $i^{\text{ème}}$ polynôme symétrique en d variables. On a alors $s_i(a_1^n, \ldots, a_d^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d\}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Cependant, on a

$$\sum_{i=0}^d |s_i(a_1^n, \ldots, a_d^n)| \leqslant \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} = 2^d.$$

Cela montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour le polynôme

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i s_i(a_1^n, \ldots, a_d^n)x^{n-i} \in \mathbb{Z}[x].$$

Donc il existe deux entiers distincts n et m tel que $a^n = a^m$. Cela montre que a est une racine de l'unité. On verra plus loins que l'application ℝ-linéaire $\widehat{(\cdot)}_{\mathbb{R}}$ est cependant injective, via une généralisation du théorème des unités de Dirichlet.

On dit qu'un $\mathbb{R}$-diviseur adélique

$$\zeta = \sum_{v\in M_K} \zeta_v v$$

est *effectif* si tous les coefficients ζ_v sont positifs. On désigne par $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}^{+}(K)$ le cône des $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques effectifs sur $\operatorname{Spec} K$. Si ζ et ζ' sont deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques tels que $\zeta'-\zeta$ soit effectif, on note $\zeta \leqslant \zeta'$ ou $\zeta' \geqslant \zeta$.

Soit $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire qui envoie $\zeta = \sum_{v\in M_K}\zeta_v v$ en

$$\widehat{\deg}(\zeta) := \sum_{v\in M_K} n_v\zeta_v. \tag{3.3}$$

La valeur $\widehat{\deg}(\zeta)$ est appelée le *degré d'Arakelov* de ζ. La formule du produit (3.2) montre que le degré d'Arakelov d'un $\mathbb{R}$-diviseur adélique principal est nul. Donc la fonction $\widehat{\deg}(\cdot)$ induit une forme linéaire sur $\widehat{\mathrm{Cl}}_{\mathbb{R}}(K)$ que l'on note encore comme $\widehat{\deg}(\cdot)$ par abus de langage. Par définition du degré d'Arakelov, si ζ et ζ' sont deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques tels que $\zeta \leqslant \zeta'$, alors on a $\widehat{\deg}(\zeta) \leqslant \widehat{\deg}(\zeta')$.

Remarque 3.2.2. — Dans le cadre arithmétique, il n'est pas adéquate de considérer les "diviseurs à coefficients entiers", à cause de la présence des places archimédiennes. En effet, pour toute place achimédienne v, l'image de $K^\times$ par $|\cdot|_v$ est un sous-groupe dense de $]0,+\infty[$.

On désigne par $\mathbf{A}_K$ l'anneau des adèles de K. Par définition, $\mathbf{A}_K$ est le sous-ensemble de $\prod_{v\in M_K} K_v$ des éléments $(a_v)_{v\in M_K}$ tels que $|a|_v \leqslant 1$ pour toute sauf un nombre fini de places v. Tout élément inversible de $\mathbf{A}_K$ est appelé un *idèle*. Rappelons qu'un idéle est un élément $(a_v)_{v\in M_K} \in K_v^\times$ tel que $|a_v| = 1$ pour tout sauf un nombre fini de places $v \in M_K$. On peut considérer $K^\times$ comme un sous-groupe de $\mathbf{A}_K^\times$ en identifiant $a \in K^\times$ à $(a)_{v\in M_K}$. En outre, on a un homomorphisme de groupes de $\mathbf{A}_K^\times$ vers $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ qui envoie $\boldsymbol{a} = (a_v)_{v\in M_K}$ en

$$\widehat{(\boldsymbol{a})} := \sum_{v\in M_K} (-\ln|a_v|_v)v.$$

3.3. Fibrés vectoriels adéliques

On appelle *fibré vectoriel adélique* toute donnée de la forme $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$, où E est un espace vectoriel de rang fini sur K, et chaque $\|\cdot\|_v$ est une norme sur $E\otimes_K K_v$, qui satisfait aux conditions suivantes :

(1) pour toute place non-archimédienne v, la norme $\|\cdot\|_v$ est ultramétrique ;

(2) il existe une base $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ de E sur K et un sous-ensemble fini S de M_K tels que, pour toute place $v \in M_K \setminus S$, on a

$$\forall\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in K_v^r,\quad \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_v = \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |\lambda_i|_v \cdot \|e_i\|_v.$$

On dit que $\overline{E}$ est *hermitien* si, pour toute place archimédienne v, la norme $\|\cdot\|_v$ est induite par un produit euclidien ou hermitien. Si $\mathrm{rg}_K(E) = 1$, on dit que E est un *fibré en droites adélique*. Un fibré en droites adélique est nécessairement hermitien.

Remarque 3.3.1. — Pour toute base $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ de E sur K et toute place $v \in M_K$, on désigne par $\|\cdot\|_{\boldsymbol{e},v}$ la norme sur $E \otimes_K K_v$ telle que

$$\forall\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K_v^r, \quad \|\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r\|_v = \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |\lambda_i|_v \cdot \|e_i\|_v.$$

Si $\boldsymbol{e}' = (e_i')_{i=1}^r$ est une autre base de E sur K, alors on a $\|\cdot\|_{\boldsymbol{e},v} = \|\cdot\|_{\boldsymbol{e}',v}$ pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$. En effet, soit $A = (a_{ij}) \in k^{r\times r}$ la matrice de transition entre les bases $\boldsymbol{e}'$ et $\boldsymbol{e}$, c'est-à-dire

$$\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}, \quad e_i' = \sum_{j=1}^r a_{ij} e_j.$$

Il existe un sous-ensemble fini S de M_K tel que $|a_{ij}|_v \in \{0, 1\}$ pour toute place $v \in M_K \setminus S$. Pour toute place non-archimédienne $v \in M_K \setminus S$ et tout élément

$$x = \lambda_1 e_1' + \cdots + \lambda_r e_r' = \sum_{i=1}^r \lambda_i \sum_{j=1}^r a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^r \bigg(\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ij}\bigg) e_j$$

on a

$$\begin{aligned}\|x\|_{\boldsymbol{e},v} = \max_{j\in\{1,\ldots,r\}} \bigg|\sum_{i=1}^r \lambda_i a_{ij}\bigg|_v &\leqslant \max_{j\in\{1,\ldots,r\}} \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |\lambda_i|_v \cdot |a_{ij}|_v \\ &\leqslant \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |\lambda_i|_v = \|x\|_{\boldsymbol{e}',v}.\end{aligned}$$

De façon similaire, on a $\|\cdot\|_{\boldsymbol{e}',v} \leqslant \|\cdot\|_{\boldsymbol{e},v}$ pour toute sauf un nombre fini de places v.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique. Si s est un élément non-nul de E, alors $\|s\|_v = 1$ pour toute sauf un nombre fini de places $v \in M_K$. on désigne par $\widehat{(s)}$ le $\mathbb{R}$-diviseur adélique

$$\sum_{v\in M_K} (-\ln \|s\|_v) v.$$

Son degré d'Arakelov est noté comme $\widehat{\deg}(s)$. Par définition, on a

$$\widehat{\deg}(s) = -\sum_{v\in M_K} \ln \|s\|_v.$$

Si a est un élément non-nul de K, on a

$$\widehat{(as)} = \widehat{(a)} + \widehat{(s)}.$$

Par conséquent, on a $\widehat{\deg}(as) = \widehat{\deg}(s)$. On dit qu'un élément s de E est une *section effective* si

$$\forall\, v \in M_K, \quad \|s\|_v \leqslant 1.$$

Si s est non-nul, cela revient à dire que $\widehat{(s)}$ est un $\mathbb{R}$-diviseur adélique effectif.

On dit que deux fibrés vectoriels adéliques $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection K-linéaire $E_1 \to E_2$ qui induit une isométrie entre $E_1 \otimes_K K_v$ et $E_2 \otimes_K K_v$ pour toute place $v \in M_K$.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique. On peut identifier $E \otimes_K \mathbf{A}_K$ à un sous-groupe de $\prod_{v\in M_K} E \otimes_K K_v$, qui contient E comme un sous-groupe. Un élément s de E s'identifie à $(s)_{v\in M_K} \in E \otimes \mathbf{A}_K$.

Pour tout élément $\zeta = (\zeta_v)_{v\in M_K} \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$, on désigne par $B_\zeta(\overline{E})$ le sous-ensemble

$$\Big\{(s_v) \in \prod_{v\in M_K} E \otimes_K K_v \;\Big|\; \|s_v\|_v \leqslant e^{\zeta_v}\Big\}.$$

C'est un sous-ensemble de $E \otimes_K \mathbf{A}_K$, appelé une *boule adélique*. En effet, on peut fixer une base $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ de E et un sous-ensemble fini S de M_K tel que, pour toute place $v \in M_K \setminus S$, on a $\zeta_v = 0$ et $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\boldsymbol{e},v}$. Par définition, un élément $\boldsymbol{s}$ de $B_\zeta(\overline{E})$ est de la forme $(s_v)_{v\in M_K}$, où $s_v \in E \otimes_K K_v$, $\|s_v\|_v \leqslant e^{\zeta_v}$. On peut écrire (de façon unique) chaque s_v comme $\sum_{i=1}^r a_{i,v}e_i$, où $a_{i,v} \in K_v$. Si v est une place en dehors de S, on a

$$1 \geqslant \|s_v\|_v = \Big\|\sum_{i=1}^r a_{i,v}e_i\Big\|_{\boldsymbol{e},v} = \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |a_{i,v}|_v.$$

Donc $\boldsymbol{a}_i := (a_{i,v})_{v\in M_K}$ appartient à $\mathbf{A}_K$. Cela montre que $\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{a}_i e_i$ appartient à $E \otimes_K \mathbf{A}_K$. On munit $E \otimes_K \mathbf{A}_K$ de la topologie la moins fine telle que, pour tout $\zeta \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$, l'ensemble $B_\zeta(\overline{E})$ soit un voisinage de l'élément neutre de $E \otimes_K \mathbf{A}_K$. Cette topologie ne dépend pas du choix de la structure de fibré vectoriel adélique sur E.

Lemme 3.3.2. — *Soit G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe discret. Alors H est fermé.*

Démonstration. — Soit e l'élément d'unité de G. Soit U un voisinage ouvert de G tel que $U \cap H = \{e\}$. Comme G est un groupe topologique, il existe un voisinage ouvert V de e tel que $V^{-1}V \subset U$. On obtient que, pour tout $x \in G$, le voisinage ouvert xV contient au plus un point de H. Comme G est séparé, on obtient que H est fermé. □

Proposition 3.3.3. — *Le groupe topologique $E \otimes_K \mathbf{A}_K$ est localement compact. De plus, le sous-groupe E de $E \otimes_K \mathbf{A}_K$ est discret et fermé, et le groupe quotient $(E \otimes_K \mathbf{A}_K)/E$ est compact.*

Démonstration. — La première assertion provient du théorème de Tychonoff, qui affirme que chaque boule adélique $B_\zeta(\overline{E})$ est compact.

Pour démontrer la deuxième assertion, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\boldsymbol{e},v}$ pour toute place $v \in M_K$, où $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ est une base de E sur K. Soit $\zeta = (\zeta_v)_{v\in M_K}$ un élément tel que $\widehat{\deg}(\zeta) > 0$. Montrons que $B_\zeta(\overline{E}) \cap E = \{\mathbf{0}\}$.

Supposons que s est un élément de $B_\zeta(\overline{E}) \cap E$. On l'écrit sous la forme $s = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r$, où $a_1, \ldots, a_r$ sont dans K. Comme $s \in B_\zeta(\overline{E})$, pour toute $v \in M_K$ on a

$$\|s\|_v = \max_{i \in \{1,\ldots,r\}} |a_i|_v \leqslant e^{-\zeta_v}.$$

S'il existe un coefficient a_i qui est non-nul, alors on a $\widehat{(a_i)} \geqslant \zeta$ et donc

$$0 = \widehat{\deg}(\widehat{(a_i)}) \geqslant \widehat{\deg}(\zeta) > 0.$$

Cela est absurde. La relation $B_\zeta(\overline{E}) \cap E = \{\mathbf{0}\}$ montre que l'élément neutre est ouvert et fermé dans E et donc E est un sous-group discret de $E \otimes_K \mathbf{A}_K$, qui est forcément fermé car tout sous-groupe discret d'un groupe topologique séparé est nécessairement fermé (voire le lemme au-dessus).

Pour le dernier énoncé, il suffit de traiter le cas où $E = K$. En identifiant $\mathbf{A}_K$ à $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}_{\mathbb{Q}}$ (pour toute place $p \in M_{\mathbb{Q}}$ on a $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \cong \prod_{v \in M_K,\, v|p} K_v$), on peut encore ramener le problem au cas où $K = \mathbb{Q}$. On constate que

$$\Omega = [0,1[\times \prod_{p \in M_{\mathbb{Q}},\, p \neq \infty} \mathbb{Z}_p$$

forme un domaine fondamental de $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$, autrement dit, pour tout élément $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}_{\mathbb{Q}}$, l'ensemble $\boldsymbol{a} + \mathbb{Q}$ a un et un seul point commun avec Ω.

Montrons d'abord l'unicité, qui revient à dire que, si $\boldsymbol{a} = (a_v)_{v \in M_{\mathbb{Q}}}$ et $\boldsymbol{a}' = (a'_v)_{v \in M_{\mathbb{Q}}}$ sont deux éléments de Ω, alors leur différence n'est pas dans l'image canonique de $\mathbb{Q}$. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un nombre rationnel a tel que $a_v - a'_v = a$ pour tout $v \in M_{\mathbb{Q}}$. On a alors $|a|_p \leqslant 1$ pour tout nombre premier p, et $|a|_\infty < 1$. Cela montre que $a = 0$ car $a \in \mathbb{Z}$ et $|a|_\infty < 1$.

Il reste à vérifier que chaque classe $\boldsymbol{a} + \mathbb{Q}$ admet un représentant dans Ω. Soit S l'ensemble des place non-archimédiennes $v \in M_{\mathbb{Q}}$ tels que $|a_v|_v > 1$. D'après le corollaire 3.1.3, il existe $a \in K$ tel que $|a - a_v| \leqslant 1$ pour toute $v \in S$ et que $|a|_w \leqslant 1$ pour toute place non-archmédienne $w \in M_{\mathbb{Q}} \setminus S$. Quitte à remplacer $\boldsymbol{a}$ par $(a_v - a)_{v \in M_{\mathbb{Q}}}$, on peut supposer que $|a_v|_v \leqslant 1$ pour toute place v non-archimédienne. Enfin, il existe un entier m tel que $a_\infty - m \in [0,1[$. $(a_v - m)_{v \in M_{\mathbb{Q}}}$ est alors un représentation de $\boldsymbol{a} + \mathbb{Q}$ dans Ω. □

La proposition 3.3.3 montre que, si H est un sous-ensemble compact de $E \otimes_K \mathbf{A}_K$, alors $H \cap E$ est un ensemble fini. On désigne par $\widehat{H}^0(\overline{E})$ l'intersection de $B_{\mathbf{0}}(\overline{E})$ avec E, où $\mathbf{0}$ désigne le $\mathbb{R}$-diviseur adélique nul. Soit en outre $\widehat{h}^0(\overline{E}) := \ln \#\widehat{H}^0(\overline{E})$.

Proposition 3.3.4. — *Soient $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur* $\operatorname{Spec} K$ *et $H \subset E \otimes_K \mathbf{A}_K$ un sous-ensemble borélienne. Alors la fonction $N_H : E \otimes_K \mathbf{A}_K \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, définie comme*

$$N_H(x) = \#(E \cap (H + x)),$$

est E-périodique. De plus, on a

$$\sup_{x\in E\otimes_K \mathbf{A}_K} N_H(x) \geqslant \frac{\mathrm{vol}(H)}{\mathrm{vol}((E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E)}, \tag{3.4}$$

où $\mathrm{vol}(\cdot)$ *est une mesure de Haar sur* $E\otimes_K \mathbf{A}_K$*, et* $\mathrm{vol}((E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E)$ *désigne la mesure d'un domaine fondamental du quotient* $(E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E$*.*

Démonstration. — On a

$$\forall\, x\in E\otimes_K \mathbf{A}_K,\quad N_H(x)=\sum_{e\in E}\mathbb{1}_{H+e}(-x).$$

Donc la fonction N_H est périodique. Il existe alors une unique fonction

$$\widetilde{N}_H : (E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$$

telle que $N_H = \widetilde{N}_H\circ\pi$, où $\pi : E\otimes_K \mathbf{A}_K \to (E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E$ est l'application de projection. En outre, on a

$$\int \widetilde{N}_H(-\alpha)\,\mathrm{vol}(d\alpha)=\sum_{e\in E}\int_\Omega \mathbb{1}_{H+e}(x)\,\mathrm{vol}(dx)=\sum_{e\in E}\mathrm{vol}(H\cap(\Omega-e))=\mathrm{vol}(H),$$

où Ω est un domaine fondamental. On obtien ainsi

$$\sup N_H=\sup \widetilde{N}_H \geqslant \frac{\mathrm{vol}(H)}{\mathrm{vol}(\mathrm{vol}((E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E))}$$

□

Définition 3.3.5. — Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K$. On désigne par $\chi(\overline{E})$ le nombre réel

$$\chi(\overline{E}) := \ln\frac{\mathrm{vol}(B_{\mathbf{0}}(\overline{E}))}{\mathrm{vol}((E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E)},$$

où $\mathrm{vol}(\cdot)$ est une mesure de Haar sur $E\otimes_K \mathbf{A}_K$. Il s'avère que cette définition ne dépend pas du choix de la mesure de Haar. Le nombre $\chi(\overline{E})$ est appelé la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de $\overline{E}$.

Proposition 3.3.6. — *Soit* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel adélique sur* $\operatorname{Spec} K$*. On a*

$$\ln\#(B_{\mathbf{0}}(\overline{E})\cap E)\geqslant \chi(\overline{E})-[K:\mathbb{Q}]\,\mathrm{rg}(E)\ln(2).$$

Démonstration. — Soit $\zeta=(\zeta_v)_{v\in M_K}$ le $\mathbb{R}$-diviseur adélique tel que $\zeta_v=0$ pour v non-archimédienne et $\zeta_v'=-\ln(2)$ pour v archimédienne. Si s_1 et s_2 sont deux éléments de $B_\zeta(\overline{E})$, alors on a $s_1-s_2\in B_{\mathbf{0}}(\overline{E})$. En outre, on a

$$\mathrm{vol}(B_\zeta(\overline{E}))=2^{-[K:\mathbb{Q}]}\,\mathrm{vol}(B_{\mathbf{0}}(\overline{E})),$$

où $\mathrm{vol}(\cdot)$ est une mesure de Haar sur $E\otimes_K \mathbf{A}_K$.

D'après la proposition 3.3.4, il existe $x\in E\otimes_K \mathbf{A}_K$ tel que

$$\ln\#((x+B_\zeta(\overline{E}))\cap E)\geqslant \ln\frac{\mathrm{vol}(B_\zeta(\overline{E}))}{\mathrm{vol}((E\otimes_K \mathbf{A}_K)/E)}=\chi(\overline{E})-[K:\mathbb{Q}]\,\mathrm{rg}(E)\ln(2).$$

Comme $\#(B_0(\overline{E}) \cap E) \geqslant \#((x + B_\zeta(\overline{E})) \cap E)$, on obtient le résultat. $\square$

3.4. Normes pures

Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ telle que k soit complet par rapport à la topologie définie par $|\cdot|$. On suppose de plus que $|\cdot|$ est discrète (i.e., $|k^\times|$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}_+^\times$). On désigne par $\mathfrak{o}_k$ l'anneau de valuation de $(k, |\cdot|)$. C'est un anneau de valuation noethérien. On désigne par $\mathfrak{m}_k$ son idéal maximal (qui est un idéal principal) et fixe un uniformisant ϖ (qui est un générateur de l'idéal $\mathfrak{m}_k$).

Définition 3.4.1. — Soit V un espace vectoriel de rang fini sur k. On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{V}$ de V est un *réseau* dans V si $\mathcal{V}$ est un sous-$\mathfrak{o}_k$-module de V qui engendre V comme espace vectoriel sur k et si $\mathcal{V}$ est borné par rapport à une norme sur V (l'ensemble $\mathcal{V}$ est donc borné pour n'import quel norme sur V).

Si la valeur absolue $|\cdot|$ est non-triviale, alors les boules sont des exemples naturels de réseaux. Soient V un espace vectoriel de rang fini sur k, et $\|\cdot\|$ une norme sur V, alors pour tout $\epsilon > 0$ les ensembles

$$(V, \|\cdot\|)_{\leqslant \epsilon} := \{s \in V \,:\, \|s\| \leqslant \epsilon\} \text{ et } (V, \|\cdot\|)_{< \epsilon} := \{s \in V \,:\, \|s\| < \epsilon\}$$

sont des réseaux.

Soient V un espace vectoriel de rang fini sur k, et $\mathcal{V}$ un réseau dans V. Alors $\mathcal{V}$ est un $\mathfrak{o}_k$-module libre de rang fini. En effet, on peux fixer une base $\boldsymbol{e} = (e_i)_{i=1}^r$ sur k et considère la norme $\|\cdot\|$ définie comme

$$\forall\, (a_1, \ldots, a_r) \in k^r \,:\, \|a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r\| = \max(|a_1|, \ldots, |a_r|).$$

Comme $\mathcal{V}$ est bornée, il existe un entier n tel que $\mathcal{V}$ soit contenu dans $\varpi^n \mathfrak{o}_k e_1 + \cdots + \varpi^n \mathfrak{o}_k e_r$, qui est la boule fermée de rayon $|\varpi|^n$ dans V. Comme $\mathfrak{o}_k$ est un anneau noethérien, on obtient que $\mathcal{V}$ est un $\mathfrak{o}_k$-module de type fini. Enfin, comme $\mathcal{V}$ est un sous-$\mathfrak{o}_k$-module de V, il est sans torsion. Donc il est un $\mathfrak{o}_k$-module libre de rang fini, dont le rang est égal à $\mathrm{rg}_k(V)$ puisque V est engendré comme k-espace vectoriel par $\mathcal{V}$.

Étant donné un réseau $\mathcal{V}$ dans V, on peut construire une fonction $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ sur V comme la suite

$$\forall\, s \in V, \quad \|s\|_{\mathcal{V}} = \inf\{|a| \,:\, a \in k^\times,\ a^{-1}s \in \mathcal{V}\}.$$

Proposition 3.4.2. — *Soient V un espace vectoriel de rang fini sur k et $\mathcal{V}$ un réseau de V. Alors $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ est une norme ultramétrique sur V. En outre, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(1) toute base de $\mathcal{V}$ sur $\mathfrak{o}_k$ est une base orthonormée de $(V, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$

(2) $(V, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})_{\leqslant 1} = \mathcal{V}$;

Démonstration. — Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base de $\mathcal{V}$ sur $\mathfrak{o}_k$. Elle est aussi une base de V sur k. Soit $s = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ un élément de V. Si a est un élément de $k^\times$ tel que $a^{-1}s \in \mathcal{V}$, alors on a $a^{-1}a_i \in \mathfrak{o}_k$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, d'où $|a| \geqslant \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |a_i|$. On en déduit donc $\|s\| \geqslant \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |a_i|$. Réciproquement, si $j \in \{1, \ldots, r\}$ est un élément tel que $|a_j| = \max_{i\in\{1,\ldots,r\}} |a_i|$, alors on a $a_j^{-1}s \in \mathcal{V}$ et donc $\|s\|_{\mathcal{V}} \leqslant |a_j|$. Cela montre que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ est une norme ultramétrique sur V et $(e_i)_{i=1}^r$ est une base orthonormée.

Dans la suite, on établit le dernier énoncé de la proposition. Par définition on a $\mathcal{V} \subset (V, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})_{\leqslant 1}$. Soit x un élément non-nul de V tel que $\|x\|_{\mathcal{V}} \leqslant 1$. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $k^\times$ tel que $a_n^{-1}x \in \mathcal{V}$ et $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \|x\|_{\mathcal{V}}$. Comme $|\cdot|$ est une valuation discrète, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n| = \|x\|_{\mathcal{V}} \leqslant 1$. On a donc $a_n \in \mathfrak{o}_k$, d'où $x \in a_n\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. □

Définition 3.4.3. — Soit V un espace vectoriel de rang fini sur k. On dit qu'une norme $\|\cdot\|$ sur V est *pure* si l'image de $\|\cdot\|$ est contenu dans celle de $|\cdot|$.

Proposition 3.4.4. — *On suppose que la valeur absolue $|\cdot|$ n'est pas triviale. Soient $\|\cdot\|$ une norme ultramétrique sur V et $\mathcal{V} = (V, \|\cdot\|)_{\leqslant 1}$. Alors on a $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{V}} \leqslant |\varpi|^{-1}\|\cdot\|$, où ϖ est un uniformisant de k. Si la norme $\|\cdot\|$ est pure, alors $\|\cdot\|_{\mathcal{V}} = \|\cdot\|$.*

Démonstration. — Par définition on a $|k^\times| = \{|\varpi|^n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$. Si $x \in V \setminus \{0\}$, on désigne par A_x l'ensemble des $a \in k^\times$ tel que $\|a^{-1}x\| = |a|^{-1}\|x\| \leqslant 1$. On a

$$\|A_x\| = \{|\varpi|^n \,:\, n \in \mathbb{Z},\ |\varpi|^n \geqslant \|x\|.\}$$

Comme $\|x\|_{\mathcal{V}} = \inf \|A_x\|$, on a

$$\|x\|_{\mathcal{V}} \geqslant \|x\| > |\varpi| \cdot \|x\|_{\mathcal{V}}.$$

Si de plus la norme $\|\cdot\|$ est pure, on a $\|x\| \in \{|\varpi|^n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$, et donc $\|\cdot\|_{\mathcal{V}} = \|x\|$. □

Définition 3.4.5. — Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de rang fini et normé sur k et $\mathcal{V} = (V, \|\cdot\|)_{\leqslant 1}$ la boule unité. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ est appelée la *purifiée* de la norme $\|\cdot\|$, notée comme $\|\cdot\|_{\mathrm{pur}}$. C'est la plus petite norme pure qui est bornée inférieurement par $\|\cdot\|$. La norme $\|\cdot\|$ et sa purifiée ont la même boule unité. On désigne par $\mathrm{dp}(\|\cdot\|)$ le nombre

$$\sup_{x\in V\setminus\{0\}} \Big(\ln \|x\|_{\mathrm{pur}} - \ln \|x\|\Big),$$

appelé le *défaut de pureté* de $\|\cdot\|$.

Remarque 3.4.6. — Soient K un corps de nombres et $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$ un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K$. Alors la norme $\|\cdot\|_v$ est pure pour toute sauf un nombre fini de places non-archimédienne v. On désigne par $\overline{E}_{\mathrm{pur}} = (E, (\|\cdot\|'_v)_{v\in M_K})$ le fibré vectoriel adélique telle que $\|\cdot\|'_v = \|\cdot\|_v$ lorsque v est archimédienne et $\|\cdot\|'_v = \|\cdot\|_{v,\mathrm{pur}}$

lorsque v est non-archimédienne. Comme la purification ne change par la boule unité, on a

$$\widehat{H}^0(\overline{E}_{\mathrm{pur}}) = \widehat{H}^0(\overline{E}) \quad \text{et} \quad \chi(\overline{E}_{\mathrm{pur}}) = \chi(\overline{E}). \tag{3.5}$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{s \in E \,:\, \|s\|_v \leqslant 1 \text{ pour toute } v \text{ non-archimédienne}\},$$

alors on a

$$\|\cdot\|_{v,\mathrm{pur}} = \|\cdot\|_{\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{K,v}}$$

pour toute place non-archimédienne v, où $\mathcal{O}_K$ désigne l'anneau des entiers algébriques de K et $\mathcal{O}_{K,v}$ désigne la localisation de $\mathcal{O}_K$ en v.

On dit qu'un fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ et *pur* si on a $\overline{E} = \overline{E}_{\mathrm{pur}}$.

Proposition 3.4.7. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique de rang r sur* $\operatorname{Spec} K$. *On suppose que $\overline{E}$ est hermitien. Alors on a*

$$\widehat{\deg}(\overline{E}_{\mathrm{pur}}) = \chi(\overline{E}) - \chi(\overline{K^r}), \tag{3.6}$$

où $\overline{K^r}$ désigne l'espace vectoriel K^r muni de la famille de normes $(\|\cdot\|_v)_{v\in M_K}$ avec

$$\forall\,(a_1,\ldots,a_r)\in K_v^r,\quad \|(a_1,\ldots,a_r)\|_v = \begin{cases}\max(|a_1|_v,\ldots,|a_r|_v), & v\nmid\infty,\\ (|a_1|_v^2+\cdots+|a_r|_v^2)^{1/2}, & v\mid\infty.\end{cases}$$

Démonstration. — D'après (3.5), il suffit de traiter le cas où $\overline{E}$ est pur. Soit $(e_i)_{i=1}^r$ une base de E sur K. On utilise cette base pour identifier E à K^r et donc obtenir

$$\chi(\overline{E}) - \chi(\overline{K^r}) = \ln\frac{\mathrm{vol}(B_{\mathbf{0}}(\overline{E}))}{\mathrm{vol}(B_{\mathbf{0}}(\overline{K^r}))} = \sum_{v\in M_K}\ln\frac{\mathrm{vol}_v(\{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|_v\leqslant 1\})}{\mathrm{vol}_v(\{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|'_{\mathbf{e},v}\leqslant 1\})},$$

$$\forall\,(a_1,\ldots,a_r)\in K_v^r,\quad \|a_1e_1+\cdots+a_re_r\|'_{\mathbf{e},v} = \begin{cases}\max(|a_1|_v,\ldots,|a_r|_v), & v\nmid\infty,\\ (|a_1|_v^2+\cdots+|a_r|_v^2)^{1/2}, & v\mid\infty.\end{cases}$$

Comme $\overline{E}$ est hermitien, pour toute place archimédienne $v\in M_K$, on a

$$\ln\frac{\mathrm{vol}_v(\{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|_v\leqslant 1\})}{\mathrm{vol}_v(\{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|'_{\mathbf{e},v}\leqslant 1\})} = -n_v\ln\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_{v,\mathrm{dét}}.$$

Dans le cas où v est une place non-archimédienne, on peut supposer sans perte de généralité que $\|\cdot\|_v \leqslant \|\cdot\|'_{\mathbf{e},v}$. Soient en outre

$$\mathcal{E}_v = \{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|_v\leqslant 1\} \quad\text{et}\quad \mathcal{E}'_v = \{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|_v\leqslant 1\}.$$

On a $\mathcal{E}_v \supset \mathcal{E}'_v$ et

$$\frac{\mathrm{vol}_v(\{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|_v\leqslant 1\})}{\mathrm{vol}_v(\{s\in E_{K_v}\,:\,\|s\|'_{\mathbf{e},v}\leqslant 1\})} = \#(\mathcal{E}_v:\mathcal{E}'_v) = -n_v\ln\|e_1\wedge\cdots\wedge e_r\|_v$$

car la norme $\|\cdot\|_v$ est pure. En effet, pour tout élément non-nul $a\in\mathcal{O}_{K,v}$, on a

$$\#(\mathcal{O}_{K,v}/a\mathcal{O}_{K,v}) = p^{n_v\mathrm{ord}_v(a)}.$$

On utilise aussi un théorème du chapitre 2 qui montre que $\mathcal{E}_v$ admet une base libre (qui est une base orthonormée de $\|\cdot\|$) compatible à la base $\boldsymbol{e}$ (la matrice de transition est triangulaire). On laisse les détails aux lecteurs. □

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit V_n le volume pour la mesure de Lebesgue de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ par rapport à la norme euclidienne standard. On a

$$\ln(V_n) = \frac{n}{2}\ln(\pi) - \ln\Gamma(n/2+1) = -\frac{n}{2}\ln(n) + O(n).$$

Proposition 3.4.8. — *Soit $r \geqslant 1$ un entier. On a*

$$\chi(\overline{K^r}) = \ln(V_r)\#M_{K,\text{ré}} + (\ln(V_{2r}) + r\ln(2))\#M_{K,\text{com}} - \frac{r}{2}\ln|\mathrm{disc}(K)|,$$

où $M_{K,\text{ré}}$ et $M_{K,\text{com}}$ sont respectivement les ensembles des places réelles et complexes de K, et $\mathrm{disc}(K)$ est le discriminant du corps de nombres K. En particulier, on a

$$\chi(\overline{K^r}) = -\frac{[K:\mathbb{Q}]r}{2}\ln(r) + O(r),$$

où la constante implicite dépend du degré et du discriminant de K.

Démonstration. — Quitte à chosir une base $(e_1,\ldots,e_d)$ de $\mathcal{O}_K$ sur $\mathbb{Z}$, on identifie $\mathbf{A}_K \cong \mathbf{A}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ à $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}}^d$ et $\mathbf{A}_K/K$ à $(\mathbf{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})^d$.

Pour tout nombre premier p, soit ν_p la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$ telle que $\nu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$. Soit ν_∞ la mesure de Lebesgue usuelle sur $\mathbb{R}$. On prend la mesure de Haar vol_r sur $\mathbf{A}_K$ induite par $\nu_p^{\otimes rd}$ et $\nu_\infty^{\otimes rd}$. Rappelons que l'on a déterminer un domaine fondamental de $\mathbf{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$, qui est

$$\Omega = [0,1[\times \prod_{p\in M_\infty,\, p\neq\infty} \mathbb{Z}_p.$$

Par construction, on a $\mathrm{vol}_r(\Omega^{rd}) = 1$.

Il restre à déterminer le volume de la boule d'unité adélique. Pour tout nombre premier p, l'isomorphism

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong \prod_{\mathfrak{p}|p} K_{\mathfrak{p}}$$

induit par $(e_1,\ldots,e_d)$ envoie $\mathbb{Z}_p^d$ en $\prod_{\mathfrak{p}|p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ puisque $(e_1,\ldots,e_d)$ est une base de $\mathcal{O}_K$ sur $\mathbb{Z}$. On en déduit

$$\nu_p^{\otimes rd}\Big(\prod_{\mathfrak{p}|p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^d\Big) = 1.$$

Considérons maintenant le cas archimédien. L'isomorphisme

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong \prod_{v|\infty} K_v$$

envoie $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ en

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\sigma_v(e_i))_{v|\infty},$$

où σ_v désigne le plongement de K dans K_v. Si on identifie $\prod_{v|\infty} K_v$ à $\prod_{v|\infty} \mathbb{R}^{n_v}$, le tire en avant de la mesure $\nu_\infty^{\otimes d}$ par cet isomorphism s'identifie à

$$|\mathrm{disc}(K)|^{-1/2} 2^{\# M_{K,\mathrm{com}}}$$

fois la mesure de Lebesgue sur $\prod_{v|\infty} \mathbb{R}^{n_v}$. On obtient donc

$$\mathrm{vol}_r(B_{\mathbf{0}}(\overline{K}^r)) = V_r^{\# M_{K,\mathrm{ré}}} \cdot (2V_{2r})^{\# M_{K,\mathrm{com}}} \cdot |\mathrm{disc}(K)|^{r/2}.$$

□

Corollaire 3.4.9. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique hermitien de rang r sur* $\mathrm{Spec}\, K$*. Si*

$$\widehat{\deg}(\overline{E}_{\mathrm{pur}}) > -\chi(\overline{K^r}) - [K:\mathbb{Q}]r\ln(2), \tag{3.7}$$

alors $\widehat{H}^0(\overline{E}) \neq \{0\}$.

Démonstration. — D'après la proposition 3.4.7, on a $\widehat{\deg}(\overline{E}_{\mathrm{pur}}) = \chi(\overline{E}) - \chi(\overline{K^r})$. Donc l'inégalité (3.7) conduit à $\chi(\overline{E}) > -[K:\mathbb{Q}]r\ln(2)$. D'après la proposition 3.3.6, on obtient le résultat. □

3.5. Groupe de Picard arithmétique

Soient $\overline{L}_1 = (L_1, (\|\cdot\|_{1,v})_{v\in M_K})$ et $\overline{L}_2 = (L_2, (\|\cdot\|_{2,v})_{v\in M_K}$ deux fibrés en droites adélique, on désigne par $\overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2$ le fibré en droites adélique $(L_1\otimes L_2, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$, où pour chaque place $v\in M_K$, $\|\cdot\|_v$ est le produit tensoriel des normes $\|\cdot\|_{1,v}$ et $\|\cdot\|_{2,v}$. Le fibré en droites adélique $\overline{L}_1\otimes\overline{L}_2$ est appelé le *produit tensoriel* de $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$. Par définition, si s_1 et s_2 sont des éléments non-nuls de L_1 et L_2 respectivement, alors

$$\widehat{(s_1\otimes s_2)} = \widehat{(s_1)} + \widehat{(s_2)}.$$

Si $\zeta = (\zeta_v)_{v\in M_K}$ est un $\mathbb{R}$-diviseur adélique sur $\mathrm{Spec}\, K$, on désigne par $\overline{\mathcal{O}}(\zeta)$ le fibré en droites adélique sur $\mathrm{Spec}\, K$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est le K-module trivial, et dont la norme indexée par $v\in M_K$ est $\|\cdot\|_{\zeta,v} := e^{-\zeta}|\cdot|_v$. Par définition, si ζ_1 et ζ_2 sont deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques, alors on a

$$\overline{\mathcal{O}}(\zeta_1+\zeta_2) = \overline{\mathcal{O}}(\zeta_1)\otimes\overline{\mathcal{O}}(\zeta_2). \tag{3.8}$$

Par convention, on désigne par $\overline{\mathcal{O}}$ le fibré en droites adélique associé au $\mathbb{R}$-diviseur adélique nul, appelé le fibré en droites *triviale.*

On désigne par $\widehat{\mathrm{Pic}}(K)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites adélique sur $\mathrm{Spec}\, K$. Le produit tensoriel induit une structure de groupe commutatif sur $\widehat{\mathrm{Pic}}(K)$. L'élément neutre de ce groupe est représenté par le fibré en droites adélique trivial. Si $\overline{L} = (L, (\|\cdot\|_v)_{v\in M_K})$ est un fibré en droites adélique sur $\mathrm{Spec}\, K$, alors l'inverse de la classe d'isomorphisme $[\overline{L}]$ est représenté par $\overline{L}^\vee := (L^\vee, (\|\cdot\|_{v,*})_{v\in M_K})$.

Proposition 3.5.1. — *L'application de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ vers $\widehat{\mathrm{Pic}}(K)$ qui envoie $\zeta \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ en la classe de $\overline{\mathcal{O}}(\zeta)$ est un morphisme surjectif de groupes, dont le noyau est l'image canonique de $K^{\times}$ dans $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$.*

Démonstration. — D'après la relation (3.8), l'application $(\zeta \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)) \longmapsto \widehat{\mathrm{Pic}}(K)$ qui envoie $\zeta \in \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K)$ en la classe de $\mathcal{O}(\zeta)$ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est surjectif. En effet, si $\overline{L}$ est un fibré en droites adélique et si s est un élément non-nul, alors l'application K-linéaire $K \to L$, $a \mapsto as$ définit un isomorphisme entre $\overline{\mathcal{O}}(\widehat{(s)})$ et $\overline{L}$.

Si ζ est un $\mathbb{R}$-diviseur adélique tel que $\overline{\mathcal{O}}(\zeta)$ soit isomorphe au fibré en droites adélique trivial, alors il existe un élément $b \in K^{\times}$ tel que l'application K-linéaire $K \to K$, $a \mapsto ab$, définit un isomorphisme entre $\overline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}(\zeta)$. On a alors

$$\forall\, v \in M_K, \quad \|b\|_{\zeta,v} = e^{-\zeta_v}|b|_v = 1,$$

d'où $\zeta = -\widehat{(b)}$. □

On désigne par $\widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathbb{R}}(K)$ l'espace vectoriel $\widehat{\mathrm{Pic}}(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ modulo le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme

$$[\mathcal{O}(\zeta)]^{\lambda} \otimes [\mathcal{O}(-\lambda\zeta)].$$

La proposition précédente montre que l'on a une application $\mathbb{R}$-linéaire surjective de $\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}$ vers $\widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathbb{R}}(K)$ qui envoie ζ en $[\overline{\mathcal{O}}(\zeta)]$ dont le noyau est l'image canonique de $K_{\mathbb{R}}^{\times} = K^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On obtient ainsi le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_K \arrow[r] & K^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathrm{Pic}}(K) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & K_{\mathbb{R}}^{\times} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{R}}(K) \arrow[r] & \widehat{\mathrm{Pic}}_{\mathbb{R}}(K) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

3.6. Inégalité des pentes et filtration de Harder-Narasimhan

On a observé que, par rapport à la caractéristique d'Euler-Poincaré, le degré d'Arakelov est un invariant qui contient plus d'information sur les métrique. Le but de ce paragraphe est de développer des variants du degré d'Arakelov qui seront utile pour la suite du cours.

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique non-nul sur $\operatorname{Spec} K$. On désigne par $\widehat{\mu}(\overline{E})$ le quotient de $\widehat{\deg}(\overline{E})$ par le rang de E, appelé la *pente* de $\overline{E}$. Soient en outre

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \sup_{0\neq F\subset E} \widehat{\mu}(\overline{F}), \quad \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) := \inf_{F\subsetneq E} \widehat{\deg}(\overline{E/F})$$

où F parcourt l'ensemble des sous-espace vectoriel de E, et on considère les normes restrictions sur des sous-espaces vectoriels, et les normes quotients sur les espaces quotients. Par définition on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}).$$

Si $\overline{E} = \overline{\mathbf{0}}$ est le fibré adélique nul, par convention on définit

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{\mathbf{0}}) = +\infty, \quad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathbf{0}}) = -\infty$$

Si $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ sont deux fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} K$ et si $f : E_1 \to E_2$ est une application K-linéaire non-nul, on désigne par $h(f)$ la somme

$$\sum_{v \in M_K} n_v \ln \|f_v\|,$$

où $f_v : E_1 \otimes_K K_v \to E_2 \otimes_K K_v$ est l'application K_v-linéaire induite par f, et $\|f_v\|$ désigne la norme d'opérateur de f_v.

Lemme 3.6.1. — *Soient $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés vectoriels adéliques qui sont de même rang r, et $f : E_1 \to E_2$ un isomorphisme K-linéaire. On a*

$$\widehat{\deg}(\overline{E}_1) = \widehat{\deg}(\overline{E}_2) + h(\text{dét}(f)) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{E}_2) + rh(f) \tag{3.9}$$

En particulier, on a

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E}_2) + h(f).$$

Démonstration. — L'égalité provient du fait que $\text{dét}(f)$ est un isomorphisme entre des espaces vectoriels de rang 1 ; l'inégalité dans (3.9) résulte de l'inégalité d'Hadamard. □

Proposition 3.6.2. — *Soient $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés adéliques sur* $\operatorname{Spec} K$, *et f : $E_1 \to E_2$ une application K-linéaire.*

(1) Si f est injective, alors on a $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_2) + h(f)$.

(2) Si f est surjective, alors on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_2) + h(f)$.

(3) Si f est non-nul, alors on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_2) + h(f)$.

Démonstration. — (1) Soient F_1 un sous-espace vectoriel non-nul de E_1 et F_2 son image dans E_2 par f. Alors f définit un isomorphisme entre F_1 et F_2. D'après le lemme 3.6.1, on a

$$\widehat{\mu}(\overline{F}_1) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{F}_2) + h(f) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_2) + h(f).$$

Comme F_1 est arbitraire, on obtient $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_2) + h(f)$.

(2) Soient $F_2 \subsetneq E_2$ un sous-espace vectoriel de E_2, et F_1 l'image réciproque de F_2 par f. Comme f est surjective, elle induit un isomorphisme entre E_1/F_1 et E_2/F_2. D'après le lemme 3.6.1, on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E_1/F_1}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E_2/F_2}) + h(f).$$

Comme F_2 est arbitraire, on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_2) + h(f).$$

(3) D'après les deux énoncé précédents, on a

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1) \leqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{f(E_1)}) + h(f) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_2) + h(f).$$

□

Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K$. On définit

$$\delta(\overline{E}) := \widehat{\deg}(\overline{E}) + \widehat{\deg}(\overline{E}^\vee).$$

D'après un résultat du chapitre 2, on obtient $\delta(\overline{E}) \geqslant 0$. De plus, si $\overline{E}$ est hermitien, alors on a $\delta(\overline{E}) = 0$.

Proposition 3.6.3. — *Soit* $0 \longrightarrow \overline{F} \longrightarrow \overline{E} \longrightarrow \overline{G} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de fibrés vectoriels adéliques sur* $\operatorname{Spec} K$*. On a*

$$\widehat{\deg}(\overline{F}) + \widehat{\deg}(\overline{G}) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{E}) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{F}) + \widehat{\deg}(\overline{G}) + \delta(\overline{E}) - \delta(\overline{F}) - \delta(\overline{G}).$$

En outre, si $\overline{E}$ *est hermitien, alors on a l'égalité* $\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{F}) + \widehat{\deg}(\overline{G})$.

Démonstration. — Soit f l'isomorphisme canonique de $\text{dét}(F) \otimes \text{dét}(G)$ vers $\text{dét}(E)$. On a vu que $\|f_v\| \leqslant 1$ pour toute place $v \in M_K$. On obtient donc la première inégalité. La deuxième inégalité provient de la première et le fait que

$$0 \longrightarrow \overline{G}^\vee \longrightarrow \overline{E}^\vee \longrightarrow \overline{F}^\vee \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés vectoriels adéliques. Enfin, si $\overline{E}$ est hermitien, il en est de même de $\overline{F}$ et $\overline{G}$. Donc on obtient l'égalité $\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{F}) + \widehat{\deg}(\overline{G})$ car $\delta(\overline{E}) = \delta(\overline{F}) = \delta(\overline{G}) = 0$. □

Corollaire 3.6.4. — *Soit* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel adélique sur* $\operatorname{Spec} K$*. Si* F_1 *et* F_2 *sont deux sous-espaces vectoriels de* E*, on a*

$$\widehat{\deg}(\overline{F}_1) + \widehat{\deg}(\overline{F}_2) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{F_1 \cap F_2}) + \widehat{\deg}(\overline{F_1 + F_2}) + \min(\delta(\overline{F}_1), \delta(\overline{F}_2)) - \delta(\overline{F_1 \cap F_2}),$$

où on considère des normes restrictions sur les sous-espaces vectoriels. En particulier, si $\overline{E}$ *est hermitien, alors on a*

$$\widehat{\deg}(\overline{F}_1) + \widehat{\deg}(\overline{F}_2) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{F_1 \cap F_2}) + \widehat{\deg}(\overline{F_1 + F_2}). \tag{3.10}$$

Démonstration. — Considérons d'abord la suite exacte

$$0 \longrightarrow \overline{F_1 \cap F_2} \longrightarrow \overline{F}_1 \longrightarrow \overline{F_1/(F_1 \cap F_2)} \longrightarrow 0.$$

On a

$$\widehat{\deg}(\overline{F}_1) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{F_1 \cap F_2}) + \widehat{\deg}(\overline{F_1/(F_1 \cap F_2)}) + \delta(\overline{F}_1) - \delta(\overline{F_1 \cap F_2}). \tag{3.11}$$

On considère une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow \overline{F}_2 \longrightarrow \overline{F_1 + F_2} \longrightarrow \overline{(F_1 + F_2)/F_2} \longrightarrow 0\ .$$

On a

$$\widehat{\deg}(\overline{F_1 + F_2}) \geqslant \widehat{\deg}(\overline{F}_2) + \widehat{\deg}(\overline{(F_1 + F_2)/F_2}). \tag{3.12}$$

Enfin, si on désigne par $f : F_1/(F_1 \cap F_2) \to (F_1 + F_2)/F_2$ l'isomorphism canonique, on a $\|f_v\| \leqslant 1$ pour toute $v \in M_K$. Donc on obtient

$$\widehat{\deg}(\overline{F_1/(F_1 \cap F_2)}) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{(F_1 + F_2)/F_2}). \tag{3.13}$$

Si on combine (3.11), (3.12) et (3.13), on obtient

$$\widehat{\deg}(\overline{F}_1) + \widehat{\deg}(\overline{F}_2) \leqslant \widehat{\deg}(\overline{F_1 \cap F_2}) + \widehat{\deg}(\overline{F_1 + F_2}) + \delta(\overline{F}_1) - \delta(\overline{F_1 \cap F_2}).$$

Par la symétrie entre F_1 et F_2, on obtient la première inégalité.

Si $\overline{E}$ et hermitien, alors $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ et $\overline{F_1 \cap F_2}$ le sont aussi. Donc on a $\delta(\overline{F}_1) = \delta(\overline{F}_2) = \delta(\overline{F_1 \cap F_2}) = 0$. On déduit donc (3.10) de la première inégalité. □

Proposition 3.6.5. — *Soient E un espace vectoriel de rang fini et non-nul sur K et $\Theta(E)$ la collection de tous les sous-espaces vectoriels de E. On suppose données deux fonctions $r : \Theta(E) \to \mathbb{R}_+$ et $d : \Theta(E) \to \mathbb{R}$ qui satisfont aux conditions suivantes :*

(1) la fonction $r(\cdot)$ est nulle en le sous-espace vector nul de E et prend des valeurs stricitement positives sur sous-espaces vectoriels non-nuls de E ;

(2) pour tout couple (E_1, E_2) d'éléments de $\Theta(E)$ on a

$$r(E_1 \cap E_2) + r(E_1 + E_2) = r(E_1) + r(E_2)$$

et

$$d(E_1 \cap E_2) + d(E_1 + E_2) \geqslant d(E_1) + d(E_2);$$

(3) $d(\{0\}) = 0$.

Alors la fonction $\mu = d/r$ atteint sont maximum $\mu_{\max}$ sur l'ensemble $\Theta^*(E)$ de tous les sous-espaces vectoriels non-nuls de E. En outre, il existe un unique élément E_{des} de $\Theta^*(E)$ tel que $\mu(E_{\text{des}}) = \mu_{\max}$ et qui contient tout sous-espace vectoriel F de E vérifiant $\mu(F) = \mu_{\max}$.

Démonstration. — La première relation dans la condition (2) montre que, si $L_1, \ldots, L_n$ sont des sous-espaces vectoriels de rang 1 de E, qui sont linéairement indépendents, alors on a

$$r(L_1 + \cdots + L_n) = r(L_1) + \cdots + r(L_n).$$

En particulier, si L et L' sont deux droites différentes de E, alors on a $r(L) = r(L')$ car

$$r(L) + r(L'') = r(L + L') = r(L') + r(L''),$$

où L'' est un sous-espace vectoriel de rang 1 de E engendré par un vecteur de la forme $s + s'$, où s et s' sont respectivement des vecteurs non-nuls de L et L'. Donc la fonction $r(\cdot)$ est proportionnelle à la fonction de rang. On peut donc supposer sans perte de généralité que la fonction $r(\cdot)$ s'identifie à la fonction de rang.

On démontre la proposition par récurrence sur sur le rang de E. Le cas où $r(E) = 1$ est trivial. Dans la suite, on suppose que $r(E) \geqslant 2$ et que la proposition a été démontrée pour les espaces vectoriels de rang $< r(E)$. Si pour tout sous-espace vectoriel non-nul F de E on a $\mu(F) \leqslant \mu(E)$, alors il n'y a rien à démontrer car on a $\mu(E) = \mu_{\max}$ et $E = E_{\mathrm{des}}$. Dans le cas contraire, il existe un sous-espace vectoriel E' de E tel que $\mu(E') > \mu(E)$. De plus, on peut s'arranger que $r(E')$ est maximal parmi les rangs des sous-espaces vectoriels de E vérifiant cette propriété. Il est claire que l'on a $r(E') < r(E)$. Donc, par l'hypothèse de récurrence la fonction $\mu(\cdot)$ atteint son maximum sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels non-nuls de E' et parmi les sous-espaces vectorielsE' qui maximisent $\mu(\cdot)$ il existe un plus grand sous-espace E'_{des}. On montrera que $E_{\mathrm{des}} := E'_{\mathrm{des}}$ verifie les propriétés demandées par la proposition.

Soit F un sous-espace vectoriel non-nul E. Si $F \subset E'$, alors on a $\mu(F) \leqslant \mu(E_{\mathrm{des}})$. Sinon le rang de $F \cap E'$ est plus petit que $r(F)$ et le rang de $F + E'$ est plus grand que E'. De plus, comme $F \cap E' \subset E'$, on a $\mu(F \cap E') \leqslant \mu(E_{\mathrm{des}})$; comme $F + E' \supsetneq E'$, on a $\mu(F + E') \leqslant \mu(E) < \mu(E')$. Donc on a

$$\begin{aligned} d(F \cap E') + d(F + E') &= \mu(F \cap E')r(F \cap E') + \mu(F + E')r(F + E') \\ &< \mu(E_{\mathrm{des}})r(F \cap E') + \mu(E')r(F + E'). \end{aligned}$$

Si on combine cette relation avec l'inégalité dans la condition (2) dans la proposition, on obtient

$$\mu(E_{\mathrm{des}})r(F \cap E') + \mu(E')r(F + E') > \mu(E')r(E') + \mu(F)r(F).$$

Par l'églité dans la condition (2), on en déduit

$$\mu(F)r(F) < \mu(E_{\mathrm{des}})r(F \cap E') + \mu(E')(r(F) - r(F \cap E')) \leqslant \mu(E_{\mathrm{des}})r(F).$$

Par conséquent, la fonction $\mu(\cdot)$ atteint sa valeur maximale $\mu_{\max}$ en E_{des}. Enfin, si F est un espace vectoriel non-nul de E tel que $\mu(F) = \mu(E_{\mathrm{des}})$, alors on a $F \subset E'$, et donc $F \subset E_{\mathrm{des}}$ par l'hypothèse de récurrence. □

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique hermitien non-nul sur $\operatorname{Spec} K$. On applique la proposition précédente aux fonctions de rang et de degré d'Arakelov pour obtenir l'existence d'un unique sous-espace vectoriel non-nul E_{des} de E tel que

$$\widehat{\mu}(\overline{E}_{\mathrm{des}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \sup_{0 \neq F \in \Theta(E)} \widehat{\mu}(\overline{F}).$$

Le sous-espace vectoriel E_{des} est appelé le *sous-espace vectoriel déstabilisant* du fibré vectoriel adélique hermitien $\overline{E}$. Si $\overline{E}_{\mathrm{des}} = \overline{E}$, on dit que le fibré vectoriel adélique hermitien $\overline{E}$ est *semi-stable*. En particulier, pour tout fibré vectoriel adélique non-nul $\overline{E}$ sur $\operatorname{Spec} K$, le fibré vectoriel adélique $\overline{E}_{\mathrm{des}}$ est toujours semi-stable.

Proposition 3.6.6. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique hermitien sur* $\operatorname{Spec} K$. *Alors $\overline{E}$ est semi-stable si et seulement si $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E})$.*

Démonstration. — Les sous-espaces vectoriels de E sont en bijection naturelle avec les espaces vectoriels quotients via les suites exactes de la forme

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0 .$$

En outre, on a $\widehat{\deg}(\overline{E}) = \widehat{\deg}(\overline{F}) + \widehat{\deg}(\overline{Q})$. Si pour tout sous-espace vectoriel non-nul $F \subset E$, on a $\widehat{\mu}(\overline{F}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$, alors pour tout espace vectoriel quotient non-nul Q de E on a $\widehat{\mu}(\overline{Q}) \geqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$. Réciproquement, si pour tout espace vectoriel quotient non-nul Q de E, on a $\widehat{\mu}(\overline{Q}) \geqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$, alors pour tout sous-espace vectoriel non-nul F de E, on a $\widehat{\mu}(\overline{F}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E})$. □

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique hermitien sur $\operatorname{Spec} K$. On peut construire par récurrence un drapeau

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

de sous-espaces vectoriels E tels que $\overline{E_i/E_{i-1}} = \overline{(E/E_{i-1})}_{\mathrm{des}}$, appelé le *drapeau de Harder-Narasimhan* de $\overline{E}$.

Proposition 3.6.7. — *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique hermitien* $\operatorname{Spec} K$ *et*

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

le drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$. Alors chaque sous-quotient $\overline{E_i/E_{i-1}}$ est un fibré vectoriel hermitien semi-stable. De plus, si on note $\mu_i = \widehat{\mu}(\overline{E_i/E_{i-1}})$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors on a $\mu_1 > \ldots > \mu_n$ et on a

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \operatorname{rg}_K(E_i/E_{i-1}).$$

En particulier, on a $\mu_1 \geqslant \widehat{\mu}(\overline{E}) \geqslant \mu_n$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur la longueur n du drapeau de Harder-Narasimhan. Le cas où $n = 1$ est trivial. Dans la suite, on suppose $n \geqslant 2$. Par définition

$$0 = E_1/E_1 \subsetneq E_2/E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n/E_1$$

est le drapeau de Harder-Narasimhan flag de $\overline{E/E_1}$. Donc l'hypothèse de récurrence conduit à $\mu_2 > \ldots > \mu_n$. Il reste à montrer $\mu_1 > \mu_2$. Comme E_1 est le sous-espace vectoriel déstabilisant de E et E_2 contient strictement E_1, on a

$$\mu_1 = \widehat{\mu}(\overline{E}_1) > \widehat{\mu}(\overline{E}_2). \tag{3.14}$$

En outre,

$$0 \longrightarrow \overline{E}_1 \longrightarrow \overline{E}_2 \longrightarrow \overline{E_2/E_1} \longrightarrow 0$$

forme une suite exacte de fibrés vectoriels adéliques sur $\operatorname{Spec} K$. On obtient donc

$$\widehat{\deg}(\overline{E}_2) = \widehat{\deg}(\overline{E}_1) + \widehat{\deg}(\overline{E_2/E_1}) = \mu_1 \operatorname{rg}_K(E_1) + \mu_2 \operatorname{rg}_K(E_2/E_1).$$

D'après (3.14), on obtient

$$\mu_1 \operatorname{rg}_K(E_1) + \mu_2 \operatorname{rg}_K(E_2/E_1) < \mu_1 \operatorname{rg}(E_2)$$

et donc $\mu_1 > \mu_2$. $\square$

Proposition 3.6.8. — *Soient* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel adélique hermitien sur* $\operatorname{Spec} K$ *et*

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_n = E$$

le drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{E}$*. On a* $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(\overline{E}_1)$ *et* $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \widehat{\mu}(E_n/E_{n-1})$*.*

Démonstration. — La relation $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ provient directement de la définition. Dans la suite, on démontre la deuxième égalité par récurrence sur la longueur n du drapeau de Harder-Narasimhan. Le cas où $n = 1$ provient de la proposition 3.6.6. Dans la suite, on suppose que la proposition a été démontrée pour tout fibré vectoriel adélique hermitien dont la longueur du drapeau de Harder-Narasimhan est $n - 1$. Soit Q un quotient de E. On suppose que $\widehat{\mu}(\overline{Q}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E/E_{n-1}})$. Quitte à rempacer Q par le dernier sous-quotient du drapeau de Harder-Narasimhan de $\overline{Q}$, on peut supposer $\overline{Q}$ semi-stable. Alors E_{n-1} est contenu dans le noyau de la projection $E \to Q$ car sinon

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_{n-1}) = \widehat{\mu}(\overline{E_{n-1}/E_{n-2}}) \leqslant \widehat{\mu}_{\max}(\overline{Q}) = \widehat{\mu}(\overline{Q}) < \widehat{\mu}(\overline{E/E_{n-1}}).$$

Cela est absurde. On en déduit donc que Q est un quotient de E_n/E_{n-1} et donc $\widehat{\mu}(\overline{Q}) \leqslant \widehat{\mu}(\overline{E/E_{n-1}})$. $\square$